

# Differentialgeometrie

Gerhard Knieper <sup>1</sup>

Ruhr-Universität Bochum

Fakultät für Mathematik

WS 2010/2011

3. Dezember 2018

<sup>1</sup>Der Autor dankt Kamil Bieder, Natalia Korovina, Henrik Koehler und Thomas Stratmann für sorgfältiges Korrekturlesen und für die Hilfe beim Erstellen der Bilder. Der Index wurde von Natalia Korovina angefertigt.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Grundlegende Strukturen</b>	<b>5</b>
1.1	Differenzierbare Mannigfaltigkeiten . . . . .	5
1.2	Differenzierbare Abbildung und ihr Differential . . . . .	11
1.3	Tangentialbündel und Vektorfelder . . . . .	22
1.4	Lieklammer . . . . .	32
<b>2</b>	<b>Riemannsche Mannigfaltigkeiten</b>	<b>37</b>
2.1	Riemannsche Metrik . . . . .	37
2.2	Riemannsche Mannigfaltigkeiten und Gruppenoperationen . . . . .	42
2.3	Riemannsche Mannigfaltigkeiten als metrische Räume . . . . .	53
2.4	Kovariante Ableitung . . . . .	56
2.5	Der Levi-Civita-Zusammenhang . . . . .	66
<b>3</b>	<b>Geodätische und Vollständigkeit</b>	<b>73</b>
3.1	Geodätische und ihre grundlegenden Eigenschaften . . . . .	73
3.2	Die Exponentialabbildung . . . . .	76
3.3	Die Sätze von Hopf und Rinow . . . . .	86
<b>4</b>	<b>Krümmung Riemannscher Mannigfaltigkeiten</b>	<b>91</b>
4.1	Der Krümmungstensor . . . . .	91
4.2	Krümmungsgrößen . . . . .	93
4.3	Geodätische und die Variationsformeln . . . . .	96
4.4	Die Sätze von Bonnet-Myers und Synge . . . . .	104
4.5	Geodätische Variationen und Jacobifelder . . . . .	108
<b>5</b>	<b>Überlagerungstheorie und Anwendungen in der Geometrie</b>	<b>115</b>
5.1	Überlagerungen . . . . .	115
5.2	Fundamentalgruppe und Überlagerungen . . . . .	121
5.3	Decktransformationen und Fundamentalgruppe . . . . .	124
5.4	Anwendungen in der Riemannschen Geometrie . . . . .	128
5.5	Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung . . . . .	131
<b>6</b>	<b>Geometrie von Untermannigfaltigkeiten</b>	<b>139</b>
6.1	Die zweite Fundamentalform . . . . .	139
6.2	Die Krümmung von Untermannigfaltigkeiten . . . . .	141

<b>7</b>	<b>Volumen und Krümmung</b>	<b>145</b>
7.1	Das Riemannsche Volumen . . . . .	145
7.2	Methode zur Integralberechnung . . . . .	148
7.3	Der Schnittort . . . . .	152
7.4	Konjugierte Punkte und Minimalität von Geodätischen . . . . .	158
7.5	Indexform und Minimaleigenschaften von Jacobifeldern . . . . .	160
<b>8</b>	<b>Vergleichssätze</b>	<b>163</b>
8.1	Rauchscher Vergleichssatz . . . . .	163
8.2	Lokale Vergleichssätze . . . . .	166
8.3	Dreiecksvergleichssätze . . . . .	168
8.4	Volumenvergleich und Schnittkrümmung . . . . .	173
8.5	Jacobitensoren . . . . .	176
8.6	Volumenvergleich und Riccikrümmung . . . . .	178
<b>9</b>	<b>Mannigfaltigkeiten nicht positiver Krümmung</b>	<b>185</b>
9.1	Konvexitätseigenschaften von Hadamardmannigfaltigkeiten . . . . .	185
9.2	Fundamentalgruppe von kompakten Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung	191
<b>10</b>	<b>Der Sphärensatz</b>	<b>199</b>
10.1	Der Injektivitätsradius . . . . .	199
10.2	Der Injektivitätsradius von Mannigfaltigkeiten positiver Krümmung . . . . .	202
10.3	Der Beweis des Sphärensatzes . . . . .	204

# Kapitel 1

## Grundlegende Strukturen der Differentialgeometrie

### 1.1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Differenzierbare Mannigfaltigkeiten sind Objekte, auf denen wir in ähnlicher Weise wie auf Vektorräumen Differentialrechnung betreiben können. Sie treten z.B. in natürlicher Weise als gewisse Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  auf, die durch Gleichungen bestimmt werden. Es müssen Begriffe wie Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten erklärt werden. Wie auf Vektorräumen ist es zunächst wichtig, eine Topologie einzuführen, d.h. wir müssen erklären, was offene Mengen sind.

**Definition 1.1.1.** (a) Ein *topologischer Raum* ist eine Menge  $M$  zusammen mit einem Mengensystem  $\mathcal{O} \subset P(M)$  (Mengensystem der offenen Mengen), so dass gilt:

- $\emptyset, M \in \mathcal{O}$
  - $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{O} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{O}$
  - $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  eine beliebige Familie von Elementen in  $\mathcal{O}$ , so gilt:  $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \mathcal{O}$ .
- (b) Ein topologischer Raum  $(M, \mathcal{O})$  heißt *Hausdorffraum*, falls es für alle  $p_1 \neq p_2 \in M$  offene Mengen  $U_1, U_2 \in \mathcal{O}$  mit  $p_i \in U_i$  gibt, so dass  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ .
- (c) Eine Teilmenge  $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$  heißt *Basis* der Topologie  $\mathcal{O}$ , falls für alle  $U \in \mathcal{O}$  Mengen  $U_\alpha \in \mathcal{B}$ ,  $\alpha \in I$ , existieren mit  $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = U$ . Existiert eine abzählbare Basis der Topologie so sagt man, daß der zugehörige topologische Raum das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

**Beispiele.** (a) Auf jedem metrischen Raum  $(M, d)$  ist in kanonischer Weise eine Topologie wie folgt erklärt. Ein Punkt  $p$  in einer Teilmenge  $A \subset M$  heißt *innerer Punkt* von  $A$ , falls ein  $\epsilon > 0$  existiert mit

$$B(p, \epsilon) = \{q \in M \mid d(p, q) < \epsilon\} \subset A$$

Eine Menge  $U \subset M$ , die nur aus inneren Punkten besteht heißt *offen*. Die Menge der offenen Mengen in  $M$  bilden eine Topologie von  $M$ , genannt die durch  $d$  induzierte Topologie. Für  $M = \mathbb{R}^n$  mit der durch die Standardnorm  $\| \cdot \|$  induzierten Metrik  $d(p, q) = \|p - q\|$  ist die zugehörige Topologie abzählbar.

- (b) Sei  $(M, \mathcal{O})$  ein topologischer Raum so wird auf jeder Teilmenge  $A \subset M$  eine Topologie induziert. Wir nennen eine Menge  $V \subset A$  offen in  $A$  falls eine offene Menge  $U \in \mathcal{O}$  existiert mit  $V = U \cap M$ . Die Menge der in  $A$  offenen Mengen bilden eine Topologie, genannt die Relativtopologie.

**Definition 1.1.2.** (a) Eine  $n$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit  $M$  ( $C^0$ -Mannigfaltigkeit) ist ein Hausdorffraum, so dass zu jedem  $p \in M$  eine offene Umgebung  $U$  und ein Homöomorphismus

$$x : U \rightarrow x(U)$$

auf eine offene Teilmenge  $x(U)$  des  $\mathbb{R}^n$  existiert. Ein solcher Homöomorphismus heißt *Karte*. Die Inverse

$$x^{-1} : x(U) \rightarrow U$$

heißt *lokale Parametrisierung*. Eine Familie  $\mathcal{A} := (x_\alpha, U_\alpha)_{\alpha \in I}$  von Karten  $x_\alpha : U_\alpha \rightarrow x(U_\alpha)$  heißt *Atlas*, falls  $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = M$  ist.

- (b) Eine  $C^k$ -Mannigfaltigkeit,  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , ist eine topologische Mannigfaltigkeit mit einem Atlas  $\mathcal{A} = (x_\alpha, U_\alpha)_{\alpha \in I}$ , so dass alle Kartenwechsel

$$x_\beta \circ x_\alpha^{-1} : x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

$C^k$ -Diffeomorphismen sind.

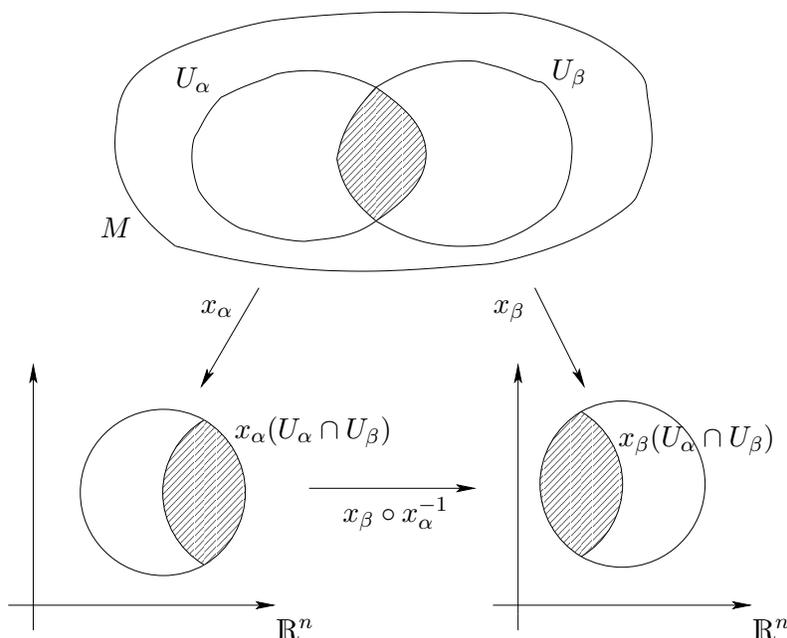


Abbildung 1.1:

**Bemerkungen.** (a) Ist  $\mathcal{A} = (x_\alpha, U_\alpha)_{\alpha \in I}$  ein  $C^k$ -Atlas, so heißt eine Karte  $x : U \rightarrow x(U)$  mit  $\mathcal{A}$  *verträglich*, falls  $\mathcal{A} \cup \{(x, U)\}$  ebenfalls ein  $C^k$ -Atlas ist. Eine  $C^k$ -Struktur auf  $M$

besteht aus allen mit  $\mathcal{A}$  verträglichen Karten. Der zugehörige Atlas ist dann maximal. Zum Beispiel ist  $(\text{id}, \mathbb{R}^n)$  ein  $C^k$ -Atlas von  $\mathbb{R}^n$ . Die zugehörige  $C^k$ -Struktur besteht aus der Menge aller lokalen  $C^k$ -Diffeomorphismen.

- (b) Wir werden im allgemeinen nur  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten betrachten, denn man kann zeigen, dass jeder maximale  $C^k$ -Atlas für  $k \geq 1$  einen  $C^\infty$ -Teilatlas besitzt. Mit anderen Worten: Eine  $C^1$ -Struktur enthält eine  $C^\infty$ -Struktur. Dagegen gibt es topologische Mannigfaltigkeiten, die keine differenzierbare Struktur zulassen.
- (c) Es existieren Mannigfaltigkeiten mit verschiedenen differenzierbaren Strukturen, d.h. mit differenzierbaren Strukturen, die nicht diffeomorph sind. Zum Beispiel existieren auf  $\mathbb{R}^4, S^7$  sogenannte exotische Strukturen, d.h. differenzierbare Strukturen, die von der Standardstruktur verschieden sind.
- (d) Nach einem berühmten Satz von H. Whitney aus dem Jahre 1936 kann man jede  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, deren Topologie das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt in den  $\mathbb{R}^{2n}$  einbetten (siehe Definition 1.2.7). Insbesondere kann man jede solche Mannigfaltigkeit als Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^{2n}$  realisieren. Diese Einbettungen sind aber nicht kanonisch.
- (e) Existiert ein Diffeomorphismus zwischen zwei Mannigfaltigkeiten (siehe Definition 1.2.1), so kann man sie als gleichwertig ansehen. Es ist jedoch hoffnungslos Mannigfaltigkeiten bis auf Diffeomorphie klassifizieren zu wollen, falls ihre Dimension größer als 3 ist. Alle 1-dimensionalen Mannigfaltigkeiten sind diffeomorph zu  $S^1$  oder  $\mathbb{R}$ . Die kompakten orientierbaren Flächen sind bis auf Diffeomorphie durch ihr Geschlecht bestimmt. Für 3-dimensionale Mannigfaltigkeiten ist vor kurzem von Perelman die folgende berühmte Vermutung von Poincaré bewiesen worden. Sie besagt, dass jede kompakte 3-dimensionale Mannigfaltigkeit diffeomorph zu  $S^3$  ist, falls sie einfach zusammenhängend ist, d.h. falls sich jede stetige Kurve stetig auf einen Punkt zusammenziehen lässt.

**Definition 1.1.3.** Sei  $M^n$  eine  $n$ -dimensionale  $C^r$ -Mannigfaltigkeit mit maximalem Atlas  $\mathcal{A} = (x_\alpha, U_\alpha)_{\alpha \in I}$ . Eine Teilmenge  $N^k \subset M^n$  heißt  $k$ -dimensionale *Untermannigfaltigkeit*, falls eine Teilmenge  $J \subset I$  existiert mit

- (a) Für alle  $\alpha \in J$  gilt:

$$x_\alpha(U_\alpha \cap N^k) = x_\alpha(U_\alpha) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}),$$

wobei  $0 \in \mathbb{R}^{n-k}$

- (b)  $\bigcup_{\alpha \in J} (U_\alpha \cap N^k) = N^k$

**Bemerkung.** Die Karten  $\mathcal{A}_{N^k} = (x_\alpha, U_\alpha \cap N^k)_{\alpha \in J}$  definieren einen  $C^r$ -Atlas für die Untermannigfaltigkeit  $N^k$ , denn die zugehörigen Kartenwechsel von  $N^k$  sind Einschränkungen der Kartenwechsel von  $M^n$  auf offene Teilmengen des  $\mathbb{R}^k$ . Die Topologie auf  $N^k$  ist die Relativtopologie. Die Zahl

$$\text{codim } N = \dim M - \dim N = n - k$$

heißt *Kodimension*.

Offensichtlich ist jede offene Teilmenge  $U$  einer Mannigfaltigkeit  $M$  eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension 0. Wähle  $J = \{\alpha \in I \mid U_\alpha \subset U\}$ .

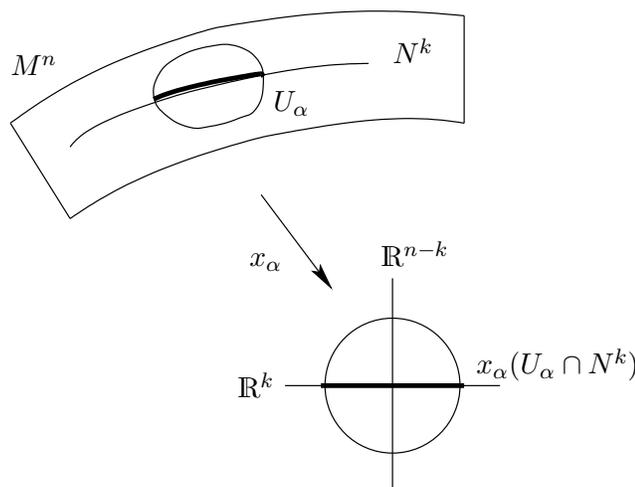


Abbildung 1.2:

**Lemma 1.1.4.** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  eine  $C^r$ -Abbildung mit regulärem Wert  $0 \in \mathbb{R}^{n-k}$ , d.h.  $Df(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  ist surjektiv für alle  $x \in f^{-1}(0)$ . Ist  $f^{-1}(0) \neq \emptyset$ , so ist  $f^{-1}(0)$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$  (und von  $U$ ).

*Beweis.* Der Beweis ist eine Konsequenz des Satzes über implizite Funktionen. Die Details seien zur Übung überlassen.  $\square$

**Beispiele.** (a)  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$  ist eine  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Dies folgt, da  $0$  regulärer Wert der Abbildung  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \|x\|^2 - 1$  ist.

(b)

$$SO(n) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid AA^T = \text{id}, \det A = 1\}$$

ist  $\frac{n(n-1)}{2}$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $M(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ .

*Beweis.* Die Menge

$$GL^+(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid \det A > 0\} \subset M(n, \mathbb{R})$$

ist offen, denn die Determinantenfunktion ist stetig. Betrachte die Abbildung

$$f : GL^+(n, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Sym}(n)$$

mit

$$f(A) = AA^T - \text{id}$$

wobei

$$\text{Sym}(n) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid A = A^T\} \cong \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

Das Differential

$$Df(A) : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Sym}(n)$$

ist gegeben durch  $Df(A)H = HA^T + AH^T$  und für jedes  $A \in f^{-1}(0) = SO(n)$  surjektiv, denn ist  $S \in Sym(n)$ , so gilt für  $H = \frac{1}{2}SA$ :

$$Df(A)H = \frac{1}{2}SAA^T + \frac{1}{2}AA^T S^T = S.$$

Also ist  $SO(n)$  eine Untermannigfaltigkeit der Dimension  $n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ .  $\square$

- (c) Die projektiven Räume  $KP^n$ ,  $K = \mathbb{R}$  (reell-projektiv) oder  $K = \mathbb{C}$  (komplex-projektiv) sind wie folgt definiert:

$$KP^n = \{\text{eindimensionaler } K\text{-linearer Untervektorraum von } K^{n+1}\}$$

Alternativ können wir den projektiven Raum  $KP^n$  auch wie folgt darstellen. Setze

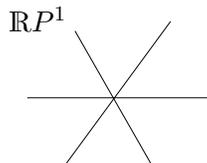


Abbildung 1.3:

$$KP^n = K^{n+1} \setminus \{0\} / \sim,$$

wobei wie folgt eine Äquivalenzrelation  $\sim$  auf  $K^{n+1} \setminus \{0\}$  definiert wird: seien  $x, y \in K^{n+1} \setminus \{0\}$ , so definiere

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in K \setminus \{0\} \text{ mit } x = \lambda \cdot y.$$

Mit  $[x] = \{\lambda x \mid \lambda \in K \setminus \{0\}\}$  sei die Äquivalenzklasse von  $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in K^{n+1}$  bezeichnet. Die Abbildung  $p : K^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow KP^n$  mit

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto [(x_1, \dots, x_{n+1})], \quad \text{bzw. kurz } x \rightarrow [x],$$

heißt *Quotientenabbildung*. Eine Menge  $U \subset KP^n$  heißt offen genau dann, falls  $p^{-1}(U)$  offen in  $K^{n+1} \setminus \{0\}$  ist. Eine offene Menge kann man sich, wie im folgenden Bild angedeutet wird, als offenes Geradenbüschel vorstellen, d.h die Menge der zugehörigen Geraden ohne den Ursprung, interpretiert als Teilmenge des  $K^{n+1}$ , ist offen.

Wir werden nun einen Atlas für  $KP^n$  angeben. Wir werden uns aus Gründen der Anschaulichkeit zunächst auf den Fall  $K = \mathbb{R}$  beschränken.

Sei  $U_i$  die Menge aller Geraden, die nicht in der Ebene  $E_i = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \mid x_i = 0\}$  liegen. Dann ist  $U_i = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \mid x_i \neq 0\}$  offen in  $KP^n$ .

Die Idee der Kartenkonstruktion besteht darin, die um  $e_i$  verschobene affine Ebene  $E'_i = E_i + e_i$  zu betrachten. Jede Gerade  $[x_1, \dots, x_{n+1}] \in U_i$  schneidet  $E'_i$  in genau einem Punkt, nämlich in

$$\left( \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right) \in [x_1, \dots, x_{n+1}].$$

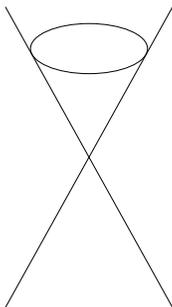


Abbildung 1.4:

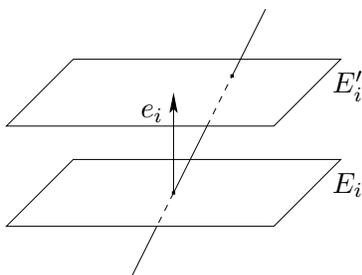


Abbildung 1.5:

Die Ebene  $E'_i$  lässt sich aber mit dem  $\mathbb{R}^n$  identifizieren, indem wir die  $i$ -te Koordinate weglassen. Wir definieren daher die Karte  $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch

$$\phi_i([x_1, \dots, x_{n+1}]) = \left( \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right).$$

Die Umkehrabbildung ist durch

$$\phi_i^{-1}(y_1, \dots, y_n) = [(y_1, \dots, y_{i-1}, 1, y_i, \dots, y_n)]$$

gegeben.

Diese Abbildungen sind Homöomorphismen. Der Beweis ist eine Übungsaufgabe. Nun wollen wir zeigen, dass die Kartenwechsel differenzierbar sind. Betrachte dazu für  $i \neq j$

$$U_i \cap U_j = \{[x_1, \dots, x_{n+1}] \mid x_i \neq 0, x_j \neq 0\}.$$

Dann gilt :  $\phi_i(U_i \cap U_j) = \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid y_j \neq 0\}$ . Der Kartenwechsel

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$$

ist somit gegeben durch

$$\begin{aligned} \phi_j \circ \phi_i^{-1}(y_1, \dots, y_n) &= \phi_j([y_1, \dots, y_{i-1}, 1, y_i, \dots, y_n]) \\ &= \frac{1}{y_j} \alpha_j(y_1, \dots, y_{i-1}, 1, y_i, \dots, y_n), \end{aligned}$$

wobei  $\alpha_j : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  die lineare Abbildung bezeichnet, die die  $j$ -te Komponente weglässt. Daraus folgt die Differenzierbarkeit des Kartenwechsels. Wegen  $\bigcup_{i=1}^{n+1} U_i = \mathbb{R}P^n$  folgt daher, dass  $\mathbb{R}P^n$  eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit darstellt.

Für  $\mathbb{C}P^n$  folgt aus der gleichen Rechnung, dass die Kartenwechsel differenzierbare Abbildungen zwischen offenen Teilmengen des  $\mathbb{C}^n$  definieren. Identifizieren wir  $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$  so folgt, dass  $\mathbb{C}P^n$  eine reell  $2n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit definiert. (Man kann sie aber auch als komplexe  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit auffassen.)

Historisch wollte man mit der projektiven Geometrie eine „Unvollkommenheit“ der euklidischen ebenen Geometrie beseitigen. In der ebenen Geometrie des  $\mathbb{R}^2$  gibt es Paare von Geraden, die sich schneiden und Paare, die sich nicht schneiden.

Diese Unterschiede sind in der projektiven Geometrie aufgehoben. Betrachte  $\mathbb{R}P^2$  und die affine Ebene  $E'_3 := \{(x_1, x_2, 1) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ . Dann entspricht jedem Punkt dieser Ebene genau ein Punkt in  $\mathbb{R}P^2$ , nämlich genau die Gerade, die den Ursprung mit dem vorgegebenen Punkt verbindet. Einer Geraden  $g$  in  $E'_3$  entspricht die Menge der Geraden, die in der Ebene  $E(g, 0)$  liegen, d.h. in der Ebene, die durch  $g$  und  $0$  bestimmt wird. Hat man nun 2 beliebige Geraden (zum Beispiel parallele Geraden)  $g$  und  $g'$  in  $E'_3$ , so haben die entsprechenden Ebenen in  $\mathbb{R}P^2$  einen Schnittpunkt, nämlich die Gerade  $E(g, 0) \cap E(g', 0)$ .

## 1.2 Differenzierbare Abbildung und ihr Differential

Nun wollen wir uns wieder der abstrakten Theorie der Mannigfaltigkeiten zuwenden. Im Folgenden verstehen wir unter einer (differenzierbaren) Mannigfaltigkeit eine Mannigfaltigkeit mit  $C^\infty$ -Struktur. Mittels einer solchen Struktur läßt sich der Differenzierbarkeitsbegriff für Abbildungen zwischen Vektorräumen wie folgt verallgemeinern.

**Definition 1.2.1.** Es seien  $M_1^n, M_2^m$  eine  $n$ - bzw.  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Eine Abbildung  $\varphi : M_1^n \rightarrow M_2^m$  heißt *differenzierbar* in  $p \in M_1^n$ , falls es Karten  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $p \in U$  und  $y : V \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $\varphi(U) \subset V$  gibt, so dass die Abbildung

$$y \circ \varphi \circ x^{-1} : x(U) \rightarrow \mathbb{R}^m$$

differenzierbar in  $x(p) \in x(U)$  ist. Die Abbildung  $y \circ \varphi \circ x^{-1}$  heißt auch *lokale Darstellung* (*Koordinatendarstellung*) der Abbildung  $\varphi$  in  $p$ .

Eine Abbildung heißt *differenzierbar*, wenn sie für alle  $p \in M_1^n$  differenzierbar ist. Ist  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , so heißt eine Abbildung  $\varphi : M_1^n \rightarrow M_2^m$   *$k$ -mal (stetig) differenzierbar*, falls für jedes  $p \in M_1^n$  eine lokale Darstellung von  $\varphi$  in  $p$  existiert, die  $k$ -mal (stetig) differenzierbar ist.

Eine bijektive Abbildung  $\varphi : M_1^n \rightarrow M_2^m$  heißt  *$C^k$ -Diffeomorphismus*, falls  $\varphi$  und  $\varphi^{-1}$   $k$ -mal stetig differenzierbar sind.

**Bemerkungen.** (a) Aus der Kettenregel für differenzierbare Abbildungen des  $\mathbb{R}^n$  folgt, dass diese Definition unabhängig von der Wahl der lokalen Darstellungen ist. Für  $k \in \mathbb{N}$  bzw.  $k = \infty$  bezeichnet  $C^k(M_1^n, M_2^m)$  die Menge der  $k$ -mal stetig differenzierbarer Abbildungen. Im Falle  $k = \infty$  sprechen wir auch von *glatten* (im Englischen “smooth”) Abbildungen. Für eine Mannigfaltigkeit  $M$  bezeichnen wir auch mit  $C^k(M)$  die Menge der  $k$ -mal

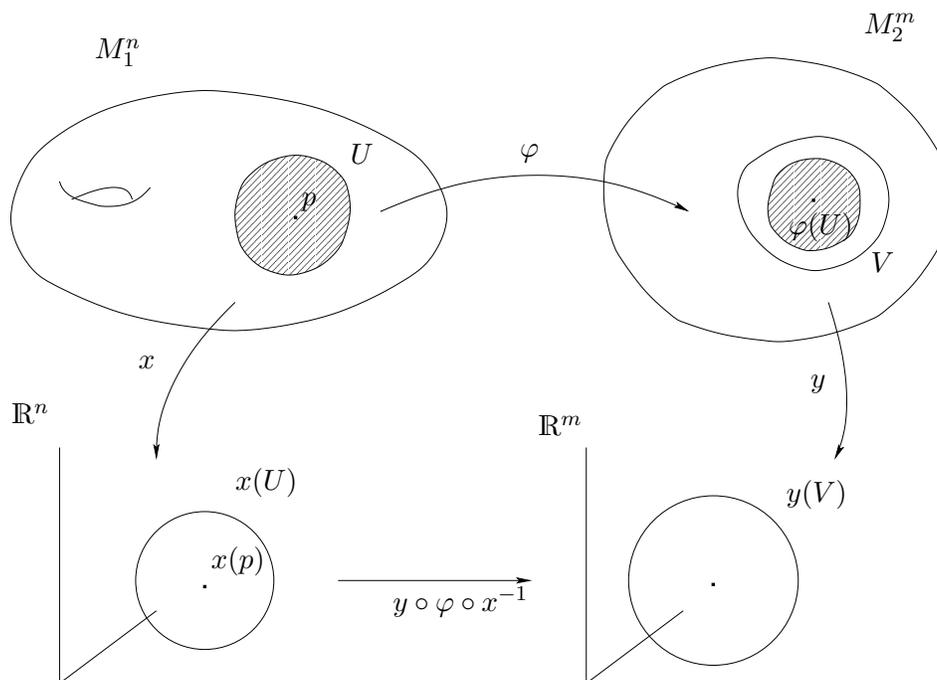


Abbildung 1.6:

stetig differenzierbaren, reellwertigen Funktionen  $C^k(M, \mathbb{R})$  auf  $M$ . Diese Menge bildet einen Vektorraum, ja sogar eine Algebra, denn sie ist abgeschlossen unter Addition und Multiplikation von Funktionen.

- (b) Aus der Kettenregel folgt auch, dass Verknüpfungen von differenzierbaren Abbildungen differenzierbar sind.
- (c) Die Identität  $id : M \rightarrow M$  ist auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $M$  immer ein  $C^\infty$ -Diffeomorphismus. Dies ist gleichbedeutend damit, dass die Kartenwechsel  $C^\infty$ -Diffeomorphismen sind.

Um die Ableitung (das Differential) einer differenzierbaren Abbildung definieren zu können, müssen wir differenzierbaren Mannigfaltigkeiten in jedem Punkt einen Vektorraum, nämlich den Tangentialraum, zuordnen. Für Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$  ist dies einfach (siehe zum Beispiel die Vorlesung „Kurven und Flächen“). Ist  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine Untermannigfaltigkeit und  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$  eine differenzierbare Kurve mit  $\alpha(0) = p$ , so können wir  $\dot{\alpha}(0) \in \mathbb{R}^n$  als Tangentialvektor von  $M$  in  $p$  interpretieren. Die Menge aller Tangentialvektoren in  $p$  (bezeichnet mit  $T_p M$ ) lässt sich dann als Untervektorraum von  $\mathbb{R}^n$  auffassen.

Diese anschauliche Definition ist für abstrakte Mannigfaltigkeiten nicht unmittelbar möglich. Es ist aber möglich,  $\dot{\alpha}(0)$  als „Richtungsableitung“ aufzufassen. Ist  $p = \alpha(0)$ , so beschreibt man diese Richtungsableitungen durch ihre Wirkung auf den Vektorraum

$$D(M, p) := \{f : M \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist differenzierbar in } p\}$$

der in  $p$  differenzierbaren reellwertigen Funktionen.

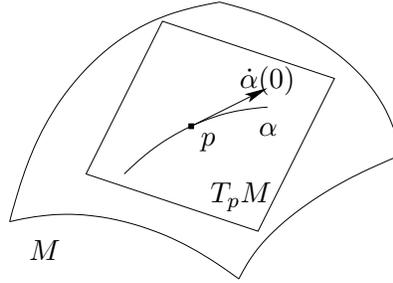


Abbildung 1.7:

**Definition 1.2.2.** Sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  eine differenzierbare Kurve mit  $\alpha(0) = p$ . Dann induziert  $\alpha$  eine lineare Abbildung  $\dot{\alpha}(0) : D(M, p) \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$\dot{\alpha}(0)(f) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ \alpha(t).$$

Diese Abbildung heißt *Tangentialvektor* von  $M$  im Punkt  $\alpha(0) = p$ . Die Menge aller Tangentialvektoren

$$T_p M = \{ \dot{\alpha}(0) : D(M, p) \rightarrow \mathbb{R} \mid \alpha : (-\epsilon, +\epsilon) \rightarrow M \text{ differenzierbar mit } \alpha(0) = p \}$$

heißt *Tangentialraum* von  $M$  im Punkt  $p$ .

**Bemerkungen.** (a) Ist  $U$  eine beliebige offene Umgebung von  $p = \alpha(0)$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine in  $p$  differenzierbare Funktion, so setze

$$\dot{\alpha}(0)(f) := \dot{\alpha}(0)(\hat{f}),$$

wobei  $\hat{f}$  eine beliebige Fortsetzung von  $f$  auf  $M$  bezeichnet (z.B.  $\hat{f}(x) = f(x)$  für  $x \in U$  und  $\hat{f}(x) = 0$  für  $x \in M \setminus U$ ). Offensichtlich hängt dies nicht von der Wahl der Fortsetzung ab.

(b) Es ist klar, dass die Menge  $T_p M$  aus linearen Abbildungen besteht, und daher ist sie eine Teilmenge des Dualraumes

$$D(M, p)^* := \{ L : D(M, p) \rightarrow \mathbb{R} \mid L \text{ linear} \}$$

von  $D(M, p)$ . Wie aus der linearen Algebra bekannt, bildet er bezüglich der Addition linearer Abbildungen einen reellen Vektorraum. Dieser Raum ist jedoch unendlich-dimensional. Wir werden sehen, dass  $T_p M \subset D(M, p)^*$  einen  $n$ -dimensionalen Untervektorraum darstellt, falls  $\dim M = n$  ist.

Wir werden nun eine explizite Basis von  $T_p M$  angeben. Diese wird durch spezielle Kurven induziert. Sei  $p \in U$  und  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Karte.

Betrachte die offensichtlich differenzierbare “ $i$ -te Koordinatenkurve”  $\beta_i : (-\epsilon, +\epsilon) \rightarrow M$  mit  $\beta_i(t) = x^{-1}(x(p) + te_i)$  (siehe Abbildung 1.8) und definiere

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p (f) := \dot{\beta}_i(0)(f)$$

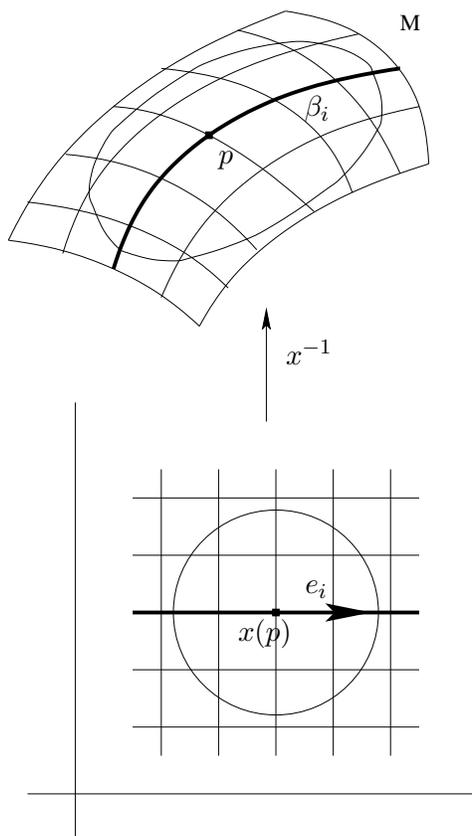


Abbildung 1.8:

Dieser Ausdruck lässt sich als partielle Ableitung von  $f$  bezüglich des durch  $x$  induzierten Koordinatensystems interpretieren, denn

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p (f) &= \dot{\beta}_i(0)(f) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f \circ \beta_i(t) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f \circ x^{-1}(x(p) + te_i) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} (f \circ x^{-1})(x(p)). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Wir werden nun zeigen, dass  $T_p M$  von den Vektoren  $\frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p$  aufgespannt wird. Genauer gilt:

**Satz 1.2.3.** *Sei  $M^n$  eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit und  $p \in M^n$ . Dann sind die Vektoren  $\frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p$  linear unabhängig, und es gilt*

$$T_p M = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \mid i \in \{1, \dots, n\} \right\}.$$

*Insbesondere ist  $T_p M$  ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum.*

*Beweis.* Wir zeigen zunächst die lineare Unabhängigkeit der Vektoren  $\frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p$ . Dazu

betrachte die Linearkombination

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p = 0.$$

Wir wenden diese auf die  $j$ -te Komponentenfunktion  $x_j : U \rightarrow \mathbb{R}$  der Karte  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  an, oder genauer auf eine beliebige Fortsetzung von  $x_j$  auf  $M$ . Es gilt

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p (x_j) = \frac{\partial}{\partial x_i} x_j \circ x^{-1} = \delta_{ij},$$

denn

$$x_j \circ x^{-1}(y_1, \dots, y_n) = y_j$$

für alle  $(y_1, \dots, y_n) \in x(U)$ . Also erhalten wir

$$0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p (x_j) = \alpha_j.$$

Nun zeigen wir, dass  $T_p M$  im Spann der Vektoren  $\left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x_n} \right|_p$  enthalten ist.

Sei also  $\dot{\alpha}(0) \in T_p M$  und  $(\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)) = x \circ \alpha(t)$  die Koordinatendarstellung der Kurve  $\alpha : (-\epsilon, +\epsilon) \rightarrow U \subset M$  bezüglich der Karte  $(x, U)$ . Dann gilt für  $\dot{\alpha}(0) \in T_p M$

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}(0)(f) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ \alpha(t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ x^{-1} \circ x \circ \alpha(t) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ x^{-1}(\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f \circ x^{-1}}{\partial x_i}(x(p)) \alpha'_i(0) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha'_i(0) \cdot \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p (f). \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass der Spann der Vektoren  $\left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x_n} \right|_p$  in  $T_p M$  enthalten ist. Dafür betrachte zu  $\sum_{i=1}^n y_i \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p$  die Kurve  $\alpha(t) = x^{-1}(x(p) + t(y_1, \dots, y_n))$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}(0)(f) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ x^{-1}(x(p) + t(y_1, \dots, y_n)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} f \circ x^{-1}(x(p)) \cdot y_i \\ &= \sum_{i=1}^n y_i \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p (f). \end{aligned}$$

□

**Bemerkung.** Statt  $\dot{\alpha}(0)$  schreiben wir manchmal auch  $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \alpha(t)$ .

Nun können wir einer differenzierbaren Abbildung das Differential wie folgt zuordnen.

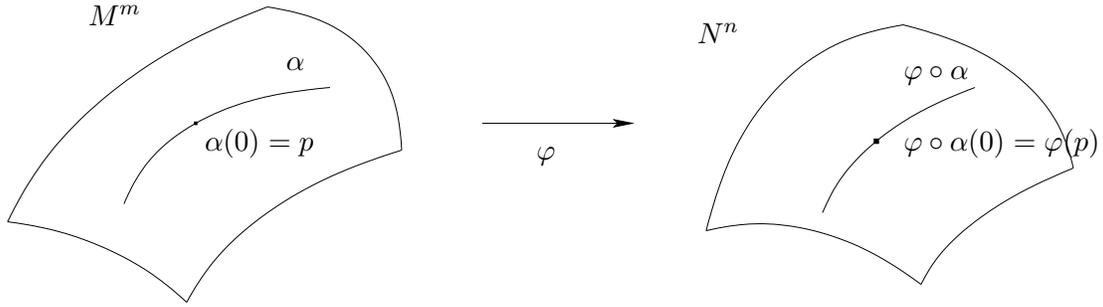


Abbildung 1.9:

**Satz 1.2.4.** *Es seien  $M^m$  und  $N^n$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten und  $\varphi : M^m \rightarrow N^n$  eine in  $p \in M^m$  differenzierbare Abbildung. Dann ist  $D\varphi(p) : T_p M^m \rightarrow T_{\varphi(p)} N^n$  mit*

$$D\varphi(p)\dot{\alpha}(0) := \widehat{\varphi \circ \alpha}(0)$$

eine lineare Abbildung. Die Abbildung  $D\varphi(p)$  heißt das Differential von  $\varphi$  in  $p$ .

*Beweis.* Zunächst zeigen wir die Wohldefiniertheit von  $D\varphi(p)$ . Betrachte zunächst eine Kurve  $\alpha$  mit  $p = \alpha(0)$  und  $f \in D(N, \varphi(p))$ . Dann ist  $f \circ \varphi \in D(M, p)$  und es gilt:

$$D\varphi(p)(\dot{\alpha}(0))(f) = \widehat{\varphi \circ \alpha}(0)(f) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ \varphi \circ \alpha(t) = \dot{\alpha}(0)(f \circ \varphi). \quad (1.2)$$

Ist nun  $\beta$  eine weitere Kurve mit  $p = \alpha(0) = \beta(0)$  und  $\dot{\beta}(0) = \dot{\alpha}(0)$ , so folgt

$$D\varphi(p)(\dot{\alpha}(0))(f) = \dot{\alpha}(0)(f \circ \varphi) = \dot{\beta}(0)(f \circ \varphi) = D\varphi(p)(\dot{\beta}(0))(f)$$

und somit ist  $D\varphi(p)$  wohldefiniert. Nun beweisen wir die Linearität:

$$\begin{aligned} D\varphi(p)(\lambda_1 \dot{\alpha}_1(0) + \lambda_2 \dot{\alpha}_2(0))(f) &\stackrel{(1.2)}{=} (\lambda_1 \dot{\alpha}_1(0) + \lambda_2 \dot{\alpha}_2(0))(f \circ \varphi) \\ &= \lambda_1 \dot{\alpha}_1(0)(f \circ \varphi) + \lambda_2 \dot{\alpha}_2(0)(f \circ \varphi) \\ &\stackrel{(1.2)}{=} \lambda_1 D\varphi(p)(\dot{\alpha}_1(0))(f) + \lambda_2 D\varphi(p)(\dot{\alpha}_2(0))(f). \end{aligned}$$

□

**Definition 1.2.5.** Sei  $\varphi : M^m \rightarrow N^n$  eine in  $p \in M^m$  differenzierbare Abbildung und  $(x, U)$  bzw.  $(y, V)$  Karten (Koordinaten) von  $M^m$  bzw.  $N^n$  mit  $p \in U$  und  $\varphi(U) \subset V$ . Dann heißt die Matrix  $a \in M(n \times m, \mathbb{R})$  mit

$$D\varphi(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p = \sum_{j=1}^n a_{ji} \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_{\varphi(p)}$$

für  $i \in \{1, \dots, m\}$  die *Jacobimatrix* des Differentials  $D\varphi(p)$  in den Koordinaten  $(x, U)$  und  $(y, V)$ .

**Bemerkung** (Berechnung der Jacobimatrix). Zur Berechnung der Jacobi-Matrix wende beide Seiten auf die  $k$ -te Komponente  $y_k : V \rightarrow \mathbb{R}$  der Karte  $(y, V)$  an. Da  $\frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_{\varphi(p)}(y_k) = \delta_{kj}$  (siehe Beweis von 1.2.3) folgt

$$a_{ki} = D\varphi(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p (y_k) \stackrel{(1.2)}{=} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p y_k \circ \varphi \stackrel{(1.1)}{=} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{x(p)} y_k \circ \varphi \circ x^{-1},$$

Dies zeigt das  $a$  mit der Jacobimatrix des Differential der lokalen Darstellung  $y \circ \varphi \circ x^{-1}$  im Punkte  $x(p)$  übereinstimmt.

Nun wollen wir zeigen, dass in geeigneten lokalen Koordinaten eine differenzierbare Abbildung die Form einer Unterraum-Einbettung bzw. Projektion hat, wenn ihr Differential injektiv oder surjektiv ist. Dies ist im Wesentlichen eine Konsequenz des inversen Funktionentheoremes.

**Satz 1.2.6.** *Es seien  $M^m$  und  $N^n$  Mannigfaltigkeiten und  $\varphi : M^m \rightarrow N^n$  eine  $C^k$ -Abbildung. Für  $p \in M^m$  sei  $D\varphi(p) : T_p M^m \rightarrow T_p N^n$  das Differential von  $\varphi$  in  $p$ . Dann gilt:*

- (1) *Ist  $D\varphi(p)$  injektiv, so ist  $m \leq n$ , und es existiert eine  $C^\infty$ -Karte  $(x_0, U_0)$  mit  $p \in U_0$  sowie eine  $C^k$ -Karte  $(y_0, V_0)$  mit  $\varphi(U_0) \subset V_0$ , so dass*

$$y_0 \circ \varphi \circ x_0^{-1}(q_1, \dots, q_m) = (q_1, \dots, q_m, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$$

für alle  $q = (q_1, \dots, q_m) \in x_0(U_0) \subset \mathbb{R}^m$  gilt.

- (2) *Ist  $D\varphi(p)$  surjektiv, so ist  $m \geq n$ , und es existiert eine  $C^k$ -Karte  $(x_0, U_0)$  mit  $p \in U_0$  sowie eine  $C^\infty$ -Karte  $(y_0, V_0)$  mit  $\varphi(U_0) \subset V_0$ , so dass*

$$y_0 \circ \varphi \circ x_0^{-1}(q_1, \dots, q_m) = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$$

für alle  $q = (q_1, \dots, q_m) \in x_0(U_0) \subset \mathbb{R}^m$  gilt.

- (3) *Ist  $D\varphi(p)$  bijektiv, so ist  $m = n$ , und es existiert eine  $C^k$ -Karte  $(x_0, U_0)$  mit  $p \in U_0$  sowie eine  $C^k$ -Karte  $(y_0, V_0)$  mit  $\varphi(U_0) \subset V_0$ , so dass*

$$y_0 \circ \varphi \circ x_0^{-1}(q_1, \dots, q_n) = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$$

für alle  $q = (q_1, \dots, q_m) \in x_0(U_0) \subset \mathbb{R}^m$  gilt.

**Bemerkungen.** (a) Offensichtlich folgt (3) aus (1) und (2). Wegen der Linearität des Differential folgt aus der Injektivität  $m \leq n$  und aus der Surjektivität  $m \geq n$ .

(b) Ist  $D\varphi(p)$  bijektiv und  $U_0$  wie in (3) gewählt, so ist insbesondere  $\varphi : U_0 \rightarrow \varphi(U_0)$  ein  $C^k$ -Diffeomorphismus.

(c) Obiger Satz kann auch als nichtlineare Verallgemeinerung des folgenden wohlbekannten und einfach zu beweisenden Satzes aus der linearen Algebra aufgefasst werden. Ist zum Beispiel  $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine injektive lineare Abbildung, so existieren bijektive lineare Abbildungen  $x_0 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $y_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit

$$y_0 \circ \varphi \circ x_0^{-1}(q_1, \dots, q_m) = (q_1, \dots, q_m, 0, \dots, 0).$$

Entsprechendes gilt, falls  $\varphi$  surjektiv bzw. bijektiv ist.

*Beweis.* Wir werden nur die Aussage (1) beweisen. Seien zunächst  $(x, U)$  und  $(y, V)$  Karten mit  $p \in U$  und  $\varphi(U) \subset V$  und  $x(p) = 0 \in \mathbb{R}^m$  und  $y(\varphi(p)) = 0 \in \mathbb{R}^n$ . Nach Annahme ist die Abbildung

$$\psi := y \circ \varphi \circ x^{-1}$$

auf  $x(U)$   $k$ -mal stetig differenzierbar, und das Differential  $D\psi(0) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist in  $0 = x(p) \in x(U)$  injektiv. Insbesondere hat  $D\psi(0)$  den Rang  $m$ . Durch Vertauschung der Komponenten der Karte  $y$  können wir erreichen, dass die Matrix

$$\left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}(0) \right)_{1 \leq i, j \leq m} =: A$$

Rang  $m$  hat und somit invertierbar ist.

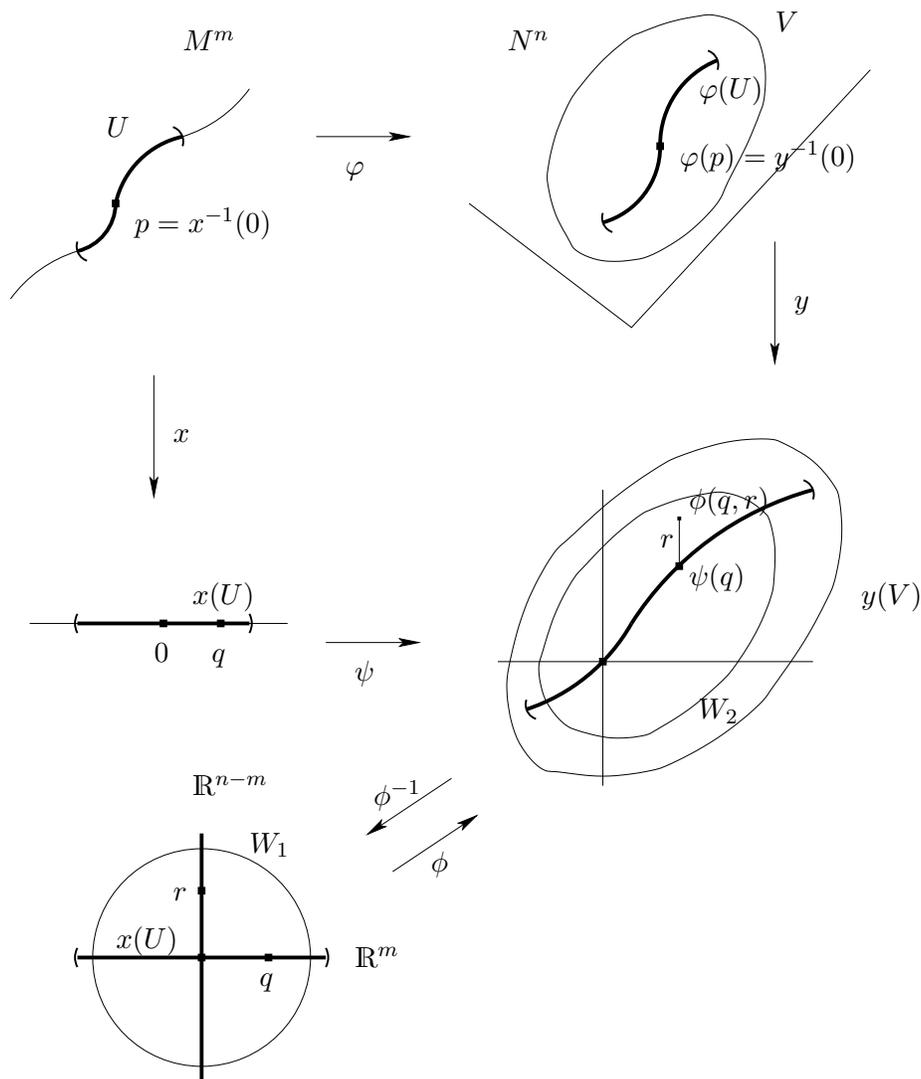


Abbildung 1.10:

Erweitere die Abbildung  $\psi$  auf folgende Weise: Betrachte

$$\phi : x(U) \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

mit

$$\phi(q, r) = \psi(q) + \underbrace{(0, \dots, 0)}_m, r_1, \dots, r_{n-m}.$$

Dann gilt:

$$D\phi(0) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ * & \text{id} \end{pmatrix} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

ist invertierbar, da die Spalten linear unabhängig sind. Dann folgt aus dem inversen Funktionentheorem: es gibt offene Umgebungen  $W_1, W_2$  von  $0 \in \mathbb{R}^n$  mit  $W_1 \subset x(U) \times \mathbb{R}^{n-m}$  und  $W_2 \subset y(V)$ , so dass  $\phi : W_1 \rightarrow W_2$  ein  $C^k$ -Diffeomorphismus ist. Dann definiere neue Karten  $(y_0, V_0)$  mit  $y_0 := \phi^{-1} \circ y$  auf  $V_0 = y^{-1}(W_2) \subset V$  und  $(x_0, U_0)$  mit  $x_0 = x|_{U_0}$ , wobei  $U_0 = x^{-1}(\{q \in x(U) \mid (q, 0) \in W_1\})$ . Dann folgt:

$$\begin{aligned} y_0 \circ \varphi \circ x_0^{-1}(q_1, \dots, q_m) &= \phi^{-1} \circ y \circ \varphi \circ x^{-1}(q_1, \dots, q_m) \\ &= \phi^{-1}(\psi(q_1, \dots, q_m)) = (q_1, \dots, q_m, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

Teil (2) kann mit ähnlichen Argumenten bewiesen werden. Er sei daher als Übung überlassen.  $\square$

**Definition 1.2.7.** Es seien  $M^m$  sowie  $N^n$  Mannigfaltigkeiten und  $\varphi : M^m \rightarrow N^n$  eine  $C^k$ -Abbildung. Dann heißt  $\varphi$  *Immersion*, falls  $D\varphi(p) : T_p M^m \rightarrow T_p N^n$  für alle  $p \in M^m$  injektiv ist.

Eine Immersion  $\varphi$  heißt *Einbettung*, falls  $\varphi : M^m \rightarrow \varphi(M^m)$  ein Homöomorphismus ist, wobei  $\varphi(M^m) \subset N^n$  die Relativtopologie trägt.

Lokal ist jede Immersion eine Einbettung. Aus Satz 1.2.6 folgt sogar

**Korollar 1.2.8.** Sei  $\varphi : M^m \rightarrow N^n$  eine  $C^k$ -Abbildung und  $D\varphi(p) : T_p M^m \rightarrow T_p N^n$  injektiv für ein  $p \in M^m$ . Dann existiert eine offene Umgebung  $U_0$  von  $p$ , so dass  $\varphi : U_0 \rightarrow N$  eine Einbettung ist.

*Beweis.* Wähle Karten  $(U_0, x_0)$  und  $(V_0, y_0)$  wie in Satz 1.2.6, so ist  $\psi = y_0 \circ \varphi \circ x_0^{-1} : x_0(U_0) \rightarrow x_0(U_0) \times 0 \subset \mathbb{R}^n$  mit

$$\psi(q_1, \dots, q_m) = (q_1, \dots, q_m, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$$

eine Einbettung. Dann ist  $\varphi = y_0^{-1} \circ \psi \circ x_0 : U_0 \rightarrow N$  ebenfalls eine Einbettung, denn  $\varphi : U_0 \rightarrow \varphi(U_0)$  ist ein Homöomorphismus.  $\square$

**Bemerkung.** Man könnte vermuten, dass jede injektive Immersion  $\varphi : M^m \rightarrow N^n$  schon eine Einbettung sein muss. Dies ist jedoch nicht der Fall, wie das folgende Beispiel zeigt:

**Beispiel.** Die Abbildung  $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$  in Bild 1.11 ist eine Immersion, aber keine Einbettung, denn  $\varphi(U)$  ist nicht offen in  $\varphi(a, b)$ : es existiert keine in  $\mathbb{R}^2$  offene Menge  $V$  mit  $\varphi(U) = V \cap \varphi(a, b)$ .

Eine wichtige Eigenschaft von Einbettungen beschreibt das folgende Korollar.

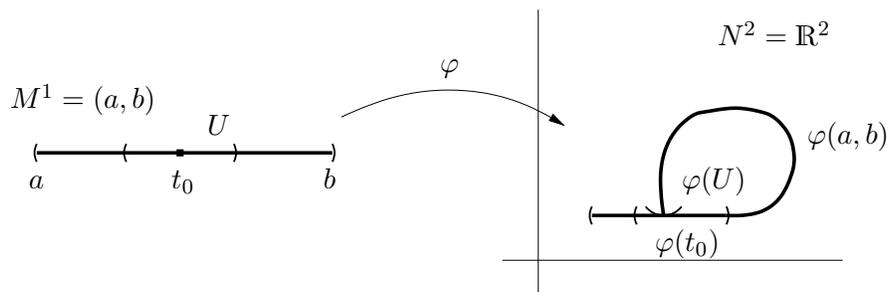


Abbildung 1.11:

**Korollar 1.2.9.** Sei  $\varphi : M^m \rightarrow N^n$  eine  $C^k$ -Einbettung. Dann ist  $\varphi(M^m)$  eine  $m$ -dimensionale  $C^k$ -Untermannigfaltigkeit von  $N^n$ .

*Beweis.* Es ist zu zeigen, dass für jedes  $p \in \varphi(M^m)$  eine Karte  $(y, V)$  mit  $p \in V$  existiert, so dass

$$y(V \cap \varphi(M^m)) = \mathbb{R}^m \times \{0\} \cap y(V).$$

Wegen Satz 1.2.6 existieren Karten  $(x_0, U_0)$  mit  $\varphi^{-1}(p) \in U_0$  und  $(y_0, V_0)$  mit  $\varphi(U_0) \subset V_0$ , so dass

$$y_0 \circ \varphi \circ x_0^{-1} : x_0(U_0) \rightarrow y_0(\varphi(U_0)) \subset \mathbb{R}^m \times \{0\}$$

mit  $y_0 \circ \varphi \circ x_0^{-1}(q_1, \dots, q_m) = (q_1, \dots, q_m, 0, \dots, 0)$ . Da  $\varphi$  eine Einbettung ist, ist  $\varphi(U_0)$  offen in  $\varphi(M^m)$ , d.h. es existiert eine offene Menge  $V \subset N^n$  mit  $\varphi(U_0) = V \cap \varphi(M^m)$ . Wegen  $\varphi(U_0) \subset V_0$  können wir  $V \subset V_0$  annehmen. Ferner können wir annehmen, dass  $V$  von der Form  $V = y_0^{-1}(W)$  ist mit  $y_0(\varphi(U_0)) = W \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$  (sonst verkleinere  $V$ ). Dann gilt

$$y_0(V \cap \varphi(M^m)) = y_0(\varphi(U_0)) = W \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}) = y_0(V) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}).$$

Dann ist  $(y, V)$  mit  $y = y_0|_V$  die verlangte Karte. (siehe Abbildung 1.12).  $\square$

**Übung.** Seien  $M^m$  und  $N^n$   $C^k$ -Mannigfaltigkeiten mit  $M^m \subset N^n$ . Dann gilt: Die Inklusion  $i : M^m \rightarrow N^n$  mit  $i(p) := p$  ist genau dann eine Einbettung, wenn  $M^m$  eine Untermannigfaltigkeit von  $N^n$  ist.

**Definition 1.2.10.** Sei  $\varphi : M^m \rightarrow N^n$  eine  $C^k$ -Abbildung, so heißt  $q \in N^n$  ein *regulärer Wert*, falls für alle  $p \in \varphi^{-1}(q)$  das Differential  $D\varphi(p) : T_p M^m \rightarrow T_q N^n$  surjektiv ist.

Ein weiteres Korollar aus Satz 1.2.6 und eine Verallgemeinerung von Lemma 1.1.4 ist

**Korollar 1.2.11.** Sei  $\varphi : M^m \rightarrow N^n$  eine  $C^k$ -Abbildung und  $q \in N^n$  ein regulärer Wert, so ist  $\varphi^{-1}(q)$  eine  $(m-n)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $M^m$ , falls  $\varphi^{-1}(q) \neq \emptyset$ .

*Beweis.* Der einfache Beweis sei als Übung überlassen. Er ist analog zum Beweis von Korollar 1.2.9.  $\square$

Ist jeder Punkt in  $N^n$  ein regulärer Wert, so spricht man von einer Submersion.

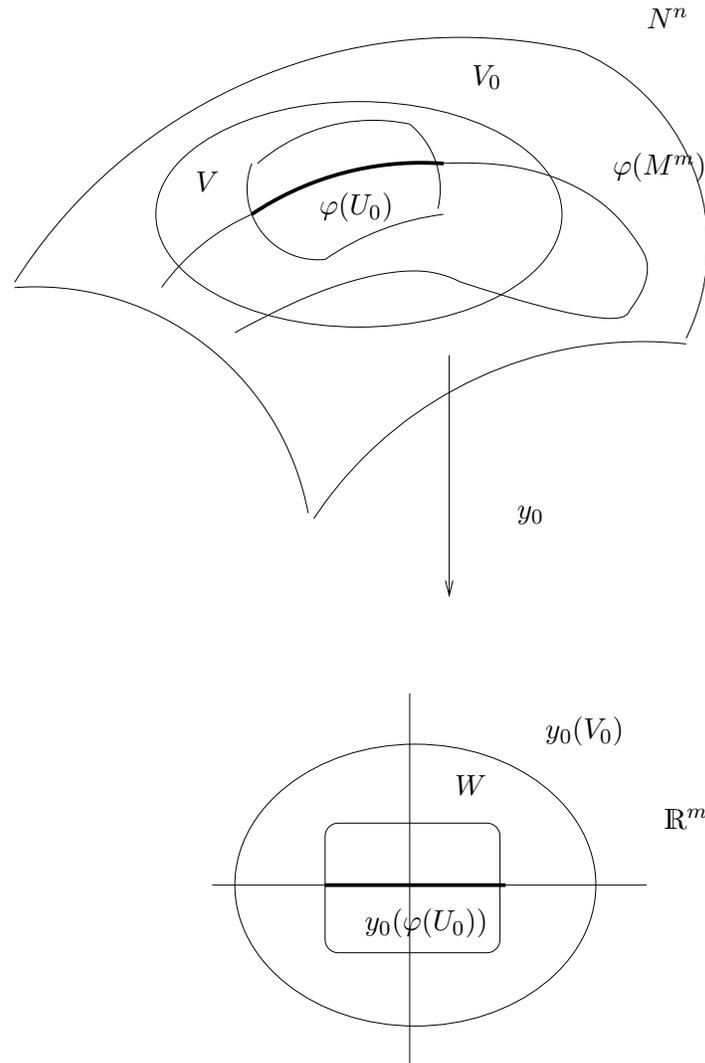


Abbildung 1.12:

**Definition 1.2.12.** Seien  $M^m, N^n$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Eine differenzierbare Abbildung  $\varphi : M^m \rightarrow N^n$  heißt *Submersion*, falls  $D\varphi(p) : T_p M^m \rightarrow T_{\varphi(p)} N^n$  für alle  $p \in M^m$  surjektiv ist.

**Bemerkung.** Ist  $\varphi$  Submersion, so ist also das Urbild (Faser) eines jeden Punktes in  $\varphi(M^m)$  eine Untermannigfaltigkeit in  $M^m$ . Wegen Satz 1.2.6 sieht lokal eine Submersion wie eine lineare Projektion aus.

### 1.3 Tangentialbündel und Vektorfelder

**Definition 1.3.1.** Sei  $M$  eine  $C^k$ -Mannigfaltigkeit. Das *Tangentialbündel*  $TM$  ist die Vereinigung der Tangentialräume, d.h.

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M.$$

Ist  $v \in T_p M$ , so heißt  $p$  der *Fußpunkt* von  $v$ . Die Abbildung  $\pi : TM \rightarrow M$ , die jedem  $v \in TM$  den Fußpunkt  $p \in M$  zuordnet, heißt *kanonische Projektion*. Ist  $U$  eine Teilmenge von  $M$ , so setze

$$TU := \bigcup_{p \in U} T_p M.$$

**Bemerkungen.** (a)  $TM$  kann man sich als Menge von Vektorräumen vorstellen, die über  $M$  parametrisiert sind (siehe Abbildung 1.13). Anstelle einer Vereinigung von Tangen-

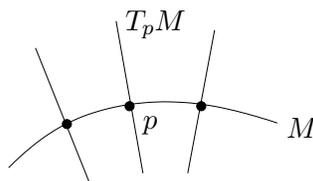


Abbildung 1.13:

tialräumen  $T_p M$  kann man auch Vereinigungen anderer Familien von Vektorräumen über  $M$  betrachten (z.B.  $T_p^* M$ ,  $T_p M \otimes T_p M$ ). Dies ist u.a. Bestandteil der Theorie der Vektorraumbündel.

(b) Ist  $M = \mathbb{R}^n$ , so können wir  $T_p \mathbb{R}^n$  in kanonischer Weise mit  $\{p\} \times \mathbb{R}^n$  identifizieren: Denn nehmen wir als Karte des  $\mathbb{R}^n$  die Identität  $x := id : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , so gilt für

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p &: D(\mathbb{R}^n, p) \rightarrow \mathbb{R} \\ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p (f) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(p + te_i) =: (p, e_i)(f), \end{aligned}$$

wobei  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  den  $i$ -ten kanonischen Einheitsvektor (1 an der  $i$ -ten Stelle) des  $\mathbb{R}^n$  bezeichnet. Damit ist die Identifikation  $\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \cong (p, e_i)$  gerechtfertigt. Setzen wir diese Identifikation linear fort, so erhalten wir

$$\sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \cong (p, \xi_1, \dots, \xi_n).$$

Insbesondere folgt:

$$T\mathbb{R}^n = \bigcup_{p \in \mathbb{R}^n} T_p \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

sowie

$$TU \cong U \times \mathbb{R}^n$$

für alle Teilmengen  $U$  des  $\mathbb{R}^n$ .

Ist  $f : M \rightarrow N$  eine differenzierbare Abbildung, so induziert das Differential von  $f$  eine Abbildung

$$Tf : TM \rightarrow TN$$

durch

$$Tf(v) := Df(\pi_M(v))v.$$

Insbesondere ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{Tf} & TN \\ \downarrow \pi_M & & \downarrow \pi_N \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

kommutativ, d.h.  $\pi_N \circ Tf = f \circ \pi_M$ .

- Sind  $M, N, O$  Mannigfaltigkeiten und  $f : M \rightarrow N$  und  $g : N \rightarrow O$  differenzierbare Abbildungen, so folgt aus der Kettenregel

$$Tg \circ Tf = T(g \circ f),$$

denn

$$\begin{aligned} Tg \circ Tf(v) &= Tg(Df(\pi_M(v))v) = Dg(\pi_N(Df(\pi_M(v))v))Df(\pi_M(v))v \\ &= Dg(f(\pi_M(v)))Df(\pi_M(v))v = D(g \circ f)(\pi_M(v))v \\ &= T(g \circ f)v \end{aligned}$$

- Ist  $f$  ein Diffeomorphismus (d.h.  $f$  ist bijektiv und  $f$  und  $f^{-1}$  sind differenzierbar), so ist  $Tf : TM \rightarrow TN$  invertierbar mit  $(Tf)^{-1} = Tf^{-1}$ , denn

$$T(f^{-1}) \circ Tf = T(f^{-1} \circ f) = T(\text{id}) = \text{id}$$

- Ist  $(x, U)$  eine Karte für  $M$ , so ist

$$x : U \rightarrow x(U) \subset \mathbb{R}^n$$

ein Diffeomorphismus und definiert daher eine bijektive Abbildung

$$Tx : TU \rightarrow Tx(U) \cong x(U) \times \mathbb{R}^n$$

mit

$$Tx(v) = Dx(\pi_M(v))v.$$

Ist also  $v = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$  mit  $p \in U$ , so ist

$$Tx(v) = (x(p), \xi_1, \dots, \xi_n), \tag{1.3}$$

denn aus der Definition des Differentials in Satz 1.2.4 und aus der Definition von  $\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$  (Bemerkung (b) nach Definition 1.2.2) folgt für  $f \in D(\mathbb{R}^n, x(p))$ :

$$Dx(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p (f) = \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p f \circ x \stackrel{(1.1)}{=} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{x(p)} f \cong (x(p), e_i)(f).$$

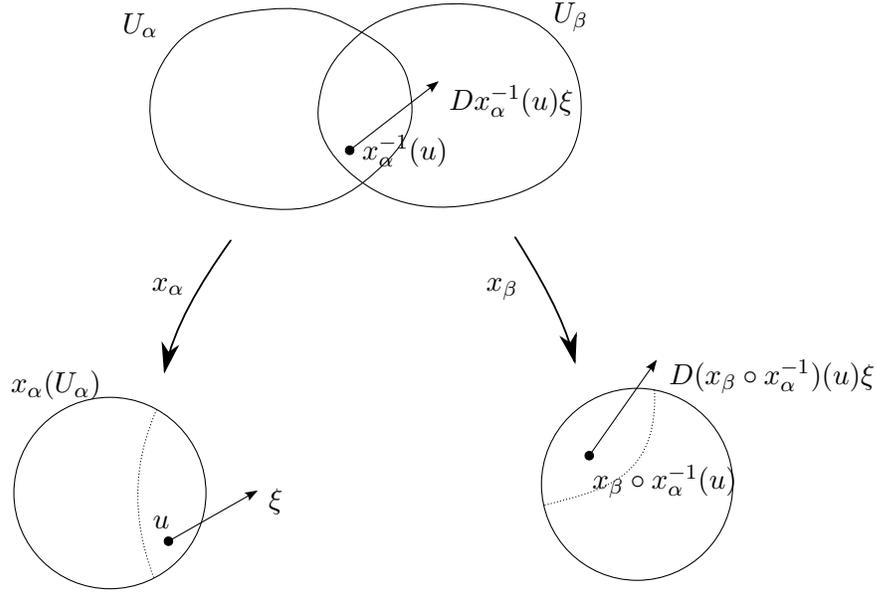


Abbildung 1.14:

**Satz 1.3.2.** Sei  $M^n$  eine  $n$ -dimensionale  $C^k$ -Mannigfaltigkeit mit Atlas

$$\mathcal{A}_{M^n} = \{(x_\alpha, U_\alpha) | \alpha \in I\}.$$

Dann ist  $TM^n$  eine  $2n$ -dimensionale  $C^{k-1}$ -Mannigfaltigkeit mit einem Atlas

$$\mathcal{A}_{TM^n} = \{(Tx_\alpha, TU_\alpha) | \alpha \in I\}$$

Dabei ist die Topologie auf  $TM$  so definiert, dass die Karten

$$Tx_\alpha : TU_\alpha \rightarrow x(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n$$

zu Homöomorphismen werden.

**Bemerkung.** Dies definiert eine eindeutig bestimmte Topologie auf  $TM$ .

*Beweis.* Zu zeigen bleibt, dass die Kartenwechsel differenzierbar sind. Hierzu seien Karten  $(x_\alpha, U_\alpha)$  und  $(x_\beta, U_\beta)$  mit  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  gegeben. Die entsprechenden Karten in  $\mathcal{A}_{TM^n}$  seien durch  $Tx_\alpha : TU_\alpha \rightarrow x_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n$  und  $Tx_\beta : TU_\beta \rightarrow x_\beta(U_\beta) \times \mathbb{R}^n$  gegeben. Damit ist

$$Tx_\beta \circ Tx_\alpha^{-1} : x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n \rightarrow x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n$$

wie folgt gegeben:

$$Tx_\beta \circ Tx_\alpha^{-1}(u, \xi) = T(x_\beta \circ x_\alpha^{-1})(u, \xi) = (x_\beta \circ x_\alpha^{-1}(u), D(x_\beta \circ x_\alpha^{-1})(u)\xi)$$

Diese Abbildung ist ein  $C^{k-1}$ -Diffeomorphismus, da  $x_\beta \circ x_\alpha^{-1}$  ein  $C^k$ -Diffeomorphismus ist.  $\square$

Im Folgenden nehmen wir an, dass alle Mannigfaltigkeiten und somit ihre Tangentialbündel  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten sind.

Die wichtigsten Abbildungen von Mannigfaltigkeiten in ihre Tangentialbündel sind Vektorfelder.

**Definition 1.3.3.** Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit und  $(\pi, TM)$  das zugehörige Tangentialbündel. Eine unendlich oft differenzierbare Abbildung  $X : M \rightarrow TM$  heißt *Vektorfeld*, falls  $\pi \circ X = id : M \rightarrow M$ , d.h. falls  $X(p) \in T_p M$  für alle  $p \in M$ . Die Menge der Vektorfelder bezeichnen wir mit  $\Gamma(TM)$ .

**Bemerkungen.**

1. Ein Vektorfeld nennt man manchmal auch einen Schnitt in  $TM$  (siehe Abbildung 1.15). Die Menge der Vektorfelder  $\Gamma(TM)$  bilden einen Vektorraum.

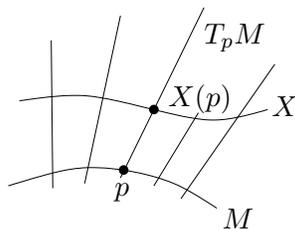


Abbildung 1.15:

2. Ist  $X : M \rightarrow TM$  ein Vektorfeld und  $(x, U)$  eine Karte, so gilt für  $p \in U$

$$X(p) = \sum_{i=1}^n \xi_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$$

mit gewissen Funktionen  $\xi_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Bezüglich der Karten  $(Tx, TU)$  und  $(x, U)$  ist  $X$  gegeben durch

$$Tx \circ X \circ x^{-1} : x(U) \rightarrow x(U) \times \mathbb{R}^n$$

mit

$$Tx \circ X \circ x^{-1}(u) = Tx \left( \sum_{i=1}^n \xi_i \circ x^{-1}(u) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{x^{-1}(u)} \right) \stackrel{(1.3)}{=} (u, \xi_1 \circ x^{-1}(u), \dots, \xi_n \circ x^{-1}(u)).$$

Daher ist  $X$  genau dann differenzierbar, falls die Funktionen  $\xi_1, \dots, \xi_n$  differenzierbar sind.

3. Ist  $X$  ein Vektorfeld auf  $M$ , so induziert  $X$  eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  durch  $X(f)(p) := X(p)(f)$ .

Die Linearität von  $X$  ist offensichtlich. Außerdem ist  $X(f) \in C^\infty(M)$  für jedes  $f \in C^\infty(M)$ , denn ist  $(x, U)$  eine Karte, so ist  $X$  für  $p \in U$  durch  $X(p) = \sum_{i=1}^n \xi_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$  gegeben und es ergibt sich:

$$X(p)(f) = \sum_{i=1}^n \xi_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p (f) = \sum_{i=1}^n \xi_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} f \circ x^{-1}(x(p)).$$

Ferner definiert  $X$  eine *Derivation* auf  $C^\infty(M)$ , d.h.  $X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  ist  $\mathbb{R}$ -linear und es gilt die folgende *Produktregel*:

$$X(f \cdot g)(p) = f(p) \cdot X(g)(p) + X(f)(p) \cdot g(p).$$

Wie wir bald sehen werden, entspricht auch jeder Derivation ein Vektorfeld (vgl. Satz 1.3.10).

**Beispiele.** (a) Ist  $M = \mathbb{R}^n$ , so ist  $T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , und  $X(u) = (u, \xi(u))$  definiert ein Vektorfeld auf  $\mathbb{R}^n$ . Oft läßt man dabei den Fußpunkt weg und schreibt  $X(u) = \xi(u)$ . Wie oben gezeigt, sieht lokal jedes Vektorfeld so aus.

(b) Ist  $M = S^n$ , so ist  $T_p S^n \cong \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid v \perp p\}$ , und ein Vektorfeld auf  $S^n$  ist eine Abbildung  $X : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  mit  $X(p) \perp p$ . Von Wichtigkeit ist die Frage, ob das Tangentialbündel einer Mannigfaltigkeit ein Vektorfeld ohne Nullstellen zulässt. Ein solches Vektorfeld zu besitzen oder nicht zu besitzen ist eine globale Eigenschaft der Mannigfaltigkeit und wird in der Differentialtopologie genauer untersucht. Zum Beispiel existiert kein Vektorfeld  $X$  auf  $S^2$  (selbst kein stetiges Vektorfeld) mit  $X(p) \neq 0$  für alle  $p \in S^2$  ("Satz vom Igel"). Hingegen ist auf  $S^{2k-1}$  für  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  mit

$$(x_1, y_1, \dots, x_k, y_k) \rightarrow (-y_1, x_1, -y_2, x_2, \dots, -y_k, x_k)$$

ein differenzierbares Vektorfeld ohne Nullstellen gegeben. Das Vektorfeld ist tangential zur sogenannten Hopffaserung.

(c) Ein Tangentialbündel  $TM^n$  heißt *trivial* oder *parallelisierbar*, falls  $n$  Vektorfelder  $X_1, \dots, X_n$  existieren, so dass für alle  $p \in M^n$  die  $X_1(p), \dots, X_n(p) \in T_p M$  linear unabhängig sind. Diese können daher insbesondere keine Nullstellen besitzen. Man beachte, dass aufgrund der durch die Karten induzierten Basisvektorfelder lokal jedes Tangentialbündel trivial ist. Die Trivialität des Tangentialbündels ist eine sehr starke globale Eigenschaft von Mannigfaltigkeiten, die höchst selten gegeben ist. Man kann zum Beispiel zeigen, dass  $TS^n$  nur für  $n \in \{1, 3, 7\}$  trivial ist (J. Adams, 1962). Ist  $TM^n$  trivial, so sind  $TM^n$  und  $M \times \mathbb{R}^n$  diffeomorph. Denn sind  $X_1, \dots, X_n$  globale Basisfelder auf  $M$ , so ist  $F : TM^n \rightarrow M \times \mathbb{R}^n$  mit

$$F(v) = (\pi_M(v), a_1(v), \dots, a_n(v)) \text{ für } v = \sum_{i=1}^n a_i(v) X_i(\pi_M(v))$$

ein Diffeomorphismus.

Jedes Vektorfeld definiert eine gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung. Ihre Lösungen heißen Integralkurven.

**Definition 1.3.4.** Sei  $X$  ein Vektorfeld auf der Mannigfaltigkeit  $M$ . Eine auf einem offenen Intervall  $I$  definierte Kurve  $c : I \rightarrow M$  heißt *Integralkurve* (oder *Trajektorie*) von  $X$ , falls

$$\dot{c}(t) = X \circ c(t),$$

für alle  $t \in I$  gilt. Mit anderen Worten: das Vektorfeld  $X$  stimmt längs  $c$  mit der Tangentialkurve von  $c$  überein (siehe Abbildung 1.16).

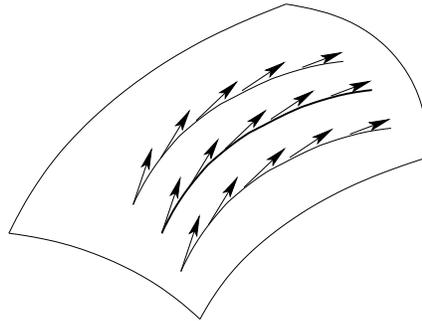


Abbildung 1.16:

**Bemerkung.** In lokalen Koordinaten bedeutet dies das Folgende:

Sei  $x : U \rightarrow x(U) = V \subset \mathbb{R}^n$  eine Karte,  $X$  ein Vektorfeld und  $c : I \rightarrow M$  eine Kurve mit  $c(I) \subset U$ , so gelten die lokalen Darstellungen

$$X(p) = \sum_{i=1}^n \xi_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p,$$

sowie

$$\dot{c}(t) = \sum_{i=1}^n \widehat{x_i \circ c(t)} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{c(t)}.$$

Damit ist

$$\dot{c}(t) = X \circ c(t)$$

äquivalent zu

$$\sum_{i=1}^n \widehat{x_i \circ c(t)} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{c(t)} = \sum_{i=1}^n \xi_i \circ c(t) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{c(t)}.$$

Dies wiederum ist gleichbedeutend mit

$$\widehat{x \circ c(t)} = \xi(c(t)),$$

wobei  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Setzen wir  $\hat{\xi} = \xi \circ x^{-1} : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $\alpha(t) = x \circ c(t)$ , so erhalten wir auf  $V \subset \mathbb{R}^n$  die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{\alpha}(t) = \hat{\xi}(\alpha(t)). \quad (1.4)$$

Ist umgekehrt  $\alpha : I \rightarrow x(U)$  eine Lösung von (1.4), so ist  $c(t) = x^{-1} \circ \alpha$  Integralkurve von  $X = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  mit  $\xi = \hat{\xi} \circ x$ .

**Satz 1.3.5** (Picard-Lindelöf). *(lokale Lösbarkeit von gewöhnlichen Differentialgleichungen)*

Sei  $V \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Menge und  $F : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine differenzierbare Abbildung. Dann besitzt die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{\alpha}(t) = F(\alpha(t))$$

zu jedem Anfangswert  $\alpha(t_0) = u \in V$  eine Lösung, d.h. es existiert ein offenes Intervall  $I \ni t_0$  und eine differenzierbare Kurve  $\alpha : I \rightarrow V$  mit  $\alpha(t_0) = u$ , so dass  $\dot{\alpha}(t) = F(\alpha(t))$ . Diese Lösung ist im folgenden Sinne eindeutig. Ist  $\beta : J \rightarrow V$  eine zweite Lösung der Gleichung  $\dot{\beta}(t) = F(\beta(t))$  mit  $\beta(t_0) = u$ , so ist  $\beta(t) = \alpha(t)$  für  $t \in I \cap J$ .

Aus dem Satz von Picard-Lindelöf und aus der obigen Diskussion ergeben sich folgende Eigenschaften der Integralkurven auf Mannigfaltigkeiten:

**Satz 1.3.6.** Sei  $X$  ein Vektorfeld auf  $M$  und  $p \in M$ . Dann existiert genau ein offenes Intervall  $I_p$  mit  $0 \in I_p$ , sowie genau eine differenzierbare Kurve  $c_p : I_p \rightarrow M$  mit  $c_p(0) = p$  und  $\dot{c}_p(t) = X(c_p(t))$ , so dass gilt: Ist  $\tilde{c} : \tilde{I} \rightarrow M$  eine weitere Kurve mit  $\tilde{c}(0) = p$  und  $\dot{\tilde{c}}(t) = X(\tilde{c}(t))$ , so gilt  $\tilde{I} \subset I_p$  und  $\tilde{c}(t) = c_p(t)$  für alle  $t \in \tilde{I}$ .

*Beweis.* Die Existenz lokaler Lösungen folgt aus dem Satz von Picard-Lindelöf und aus der Bemerkung nach Definition 1.3.4. Sind  $c_1 : I_1 \rightarrow M$  und  $c_2 : I_2 \rightarrow M$  zwei solcher Lösungen, so stimmen sie auf  $I_1 \cap I_2$  überein: Betrachte die Menge

$$L := \{t \in I_1 \cap I_2 \mid c_1(t) = c_2(t)\}$$

der Parameter mit Übereinstimmung. Zu zeigen ist  $L = I_1 \cap I_2$ .  $L$  ist abgeschlossen, aber auch offen, denn für  $t \in L$  sind die Einschränkungen  $c_1, c_2$  auf eine kleine Umgebung von  $t$  lokale Lösungen, die nach Picard-Lindelöf übereinstimmen müssen.

Sei nun  $I_p$  die Vereinigung aller Intervalle, auf denen eine Lösung durch  $p$  existiert. Definiere  $c_p(t), t \in I_p$  als den Wert einer beliebigen Lösung. Dies ist, wie gesehen, wohldefiniert und erklärt eine Lösung von

$$\dot{c}_p(t) = X(c_p(t)).$$

Die Maximalität von  $c_p$  folgt aus der Konstruktion. □

**Bemerkung.** Insbesondere lässt sich die Lösung  $c_p : I_p \rightarrow M$  der gewöhnlichen Differentialgleichung über  $I_p$  hinaus nicht fortsetzen.

**Korollar 1.3.7.** Die offenen Intervalle  $\{I_p\}_{p \in M}$  sind von der Form  $I_p = (a_p, b_p)$  mit  $a_p < 0$  und  $b_p > 0$  und haben die folgende Eigenschaft: Ist  $t_0 \in (a_p, b_p)$ , so ist

$$I_{c_p(t_0)} = (a_p - t_0, b_p - t_0),$$

und es gilt

$$c_{c_p(t_0)}(t) = c_p(t + t_0)$$

für alle  $t \in I_{c_p(t_0)}$ . Insbesondere gilt: ist  $t_0 \in I_p$ , so ist  $-t_0 \in I_{c_p(t_0)}$ , und  $s_0 \in I_{c_p(t_0)}$  genau dann, wenn  $s_0 + t_0 \in I_p$ .

*Beweis.* Ist  $c_p : I_p \rightarrow M$  eine Integralkurve und  $t_0 \in I_p$ , dann ist auch  $\alpha(t) := c_p(t + t_0)$  für alle  $t$  mit  $t + t_0 \in I_p$  eine Integralkurve, denn

$$\dot{\alpha}(t) = \dot{c}_p(t + t_0) = X(c_p(t + t_0)) = X(\alpha(t)).$$

Da  $\alpha(0) = c_p(t_0)$ , folgt aus der Eindeutigkeit der Lösung bei vorgegebenen Anfangsbedingungen

$$c_p(t + t_0) = \alpha(t) = c_{c_p(t_0)}(t)$$

für alle  $t$  mit  $t + t_0 \in I_p$ , d.h. für alle  $t \in (a_p - t_0, b_p - t_0)$ . Aus der Maximalität von  $I_{c_p(t_0)}$  folgt daher, dass  $I_{c_p(t_0)} = (a_{c_p(t_0)}, b_{c_p(t_0)})$  das Intervall  $(a_p - t_0, b_p - t_0)$  umfasst. Da somit auch  $-t_0$  in  $I_{c_p(t_0)}$  enthalten ist, folgt mit dem gleichen Argument, dass  $I_p = (a_p, b_p)$  das Intervall  $(a_{c_p(t_0)} + t_0, b_{c_p(t_0)} + t_0)$  umfasst, und wir erhalten  $I_{c_p(t_0)} = (a_p - t_0, b_p - t_0)$ .  $\square$

**Bemerkung.** Im Folgenden betrachten wir zu einem Vektorfeld  $X$  auf  $M$  die Menge

$$A := \bigcup_{p \in M} I_p \times \{p\} \subset \mathbb{R} \times M$$

und die Abbildung  $\varphi : A \rightarrow M$  definiert durch

$$\varphi(t, p) := \varphi_t(p) := c_p(t).$$

Insbesondere enthält  $A$  die Menge  $\{0\} \times M$ , und es ist  $\varphi_0$  die Identität  $\text{id}_M$  auf  $M$ . Ist  $t_0 \in I_p$  und  $s_0 \in I_{c_p(t_0)}$ , so folgt aus obigem Korollar  $s_0 + t_0 \in I_p$  und

$$\varphi_{s_0+t_0}(p) = c_p(s_0 + t_0) = c_{c_p(t_0)}(s_0) = \varphi_{s_0}(\varphi_{t_0}(p)) = \varphi_{s_0} \circ \varphi_{t_0}(p).$$

Ist  $t_0 \in I_p$  für alle  $p \in U \subset M$ , so ist  $-t_0 \in I_{c_p(t_0)}$ , und die Abbildung  $\varphi_{t_0} : U \rightarrow \varphi_{t_0}(U)$  ist bijektiv. Ihre Inverse ist durch  $\varphi_{-t_0}$  gegeben.

**Satz 1.3.8.** (differenzierbare Abhängigkeit von Anfangswerten)

Sei  $X$  ein Vektorfeld auf  $M$ . Dann ist die Menge  $A$  offen in  $\mathbb{R} \times M$ , und  $\varphi : A \rightarrow M$  ist eine  $C^\infty$ -Abbildung. Wir nennen  $\varphi : A \rightarrow M$  den zu dem Vektorfeld  $X$  gehörigen lokalen Fluss.

*Beweis.* Der Beweis dieser Aussage folgt aus einer verallgemeinerten Version des Satzes von Picard-Lindelöf.  $\square$

**Bemerkungen.** (a) Da  $A$  offen ist, existiert zu jedem  $p \in M$  ein  $\epsilon > 0$  und eine  $p$  enthaltende offene Umgebung  $U \subset M$  mit  $(-\epsilon, \epsilon) \times U \subset A$ . Wegen obiger Bemerkung ist daher für jedes  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$  die Abbildung  $\varphi_t : U \rightarrow \varphi_t(U)$  bijektiv und wegen obigen Satzes ein Diffeomorphismus.

(b) Ist  $(-\epsilon, \epsilon) \times M \subset A$ , so ist  $A = \mathbb{R} \times M$ . Denn wäre zum Beispiel  $a_p > -\infty$ , so existiert ein  $t_0 \in (a_p, b_p)$  mit  $a_p - t_0 \geq -\epsilon/2$ . Dies ist aber ein Widerspruch zu  $(-\epsilon, \epsilon) \subset I_{c_p(t_0)} = (a_p - t_0, b_p - t_0)$ . Genauso folgt  $b_p = +\infty$ .



Abbildung 1.17:

(c) Ist  $A = \mathbb{R} \times M$ , so ist  $\varphi_t : M \rightarrow M$  für jedes  $t \in \mathbb{R}$  ein Diffeomorphismus, und es gilt

$$\varphi_{t+s}(p) = \varphi_t \circ \varphi_s(p).$$

In diesem Falle bezeichnet man  $\varphi$  als *Fluss* oder *dynamisches System*. Es existiert auch eine algebraische Interpretation dieser Eigenschaft. Bezeichnet man mit

$$\text{Diff}(M) = \{f : M \rightarrow M \mid f \text{ Diffeomorphismus}\}$$

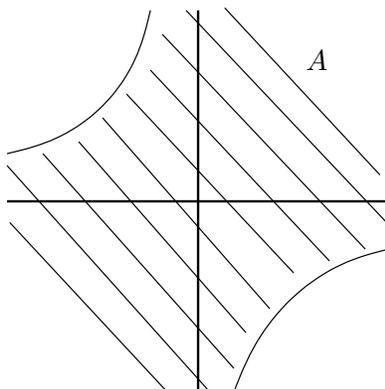


Abbildung 1.18:

die Diffeomorphismengruppe von  $M$  (bezüglich der Verknüpfung  $\circ$  von Abbildungen ist dies eine Gruppe), so ist  $\varphi : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\text{Diff}(M), \circ)$  mit  $t \mapsto \varphi_t$  ein Homomorphismus. Man nennt deshalb Flüsse auch Einparametergruppen.

(d) Ist  $\varphi : A \rightarrow M$  ein lokaler Fluss, so kann das erzeugende Vektorfeld durch

$$X(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t(p)$$

zurückgewonnen werden. Man nennt das Vektorfeld  $X$  auch den infinitesimalen Erzeuger des Flusses  $\varphi$ .

Wir wollen anhand eines elementaren Beispiels illustrieren, wie der Definitionsbereich eines lokalen Flusses aussehen kann.

**Beispiel.** Sei  $M = \mathbb{R}$ . Das Vektorfeld  $X$  sei durch  $X(p) = -p^2$  gegeben. Betrachte die zugehörige Differentialgleichung

$$\dot{c}(t) = X \circ c(t) = -c(t)^2$$

Für  $p \neq 0$  ist die Lösung  $c_p : I_p \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $c_p(0) = p$  durch

$$c_p(t) = \frac{1}{t + \frac{1}{p}}$$

gegeben. Für  $p > 0$  ist  $I_p = (-\frac{1}{p}, \infty)$ , und für  $p < 0$  ist  $I_p = (-\infty, -\frac{1}{p})$ . Ist  $p = 0$ , so ist  $c_0(t) = 0$  und  $I_0 = \mathbb{R}$ . Also ist der Definitionsbereich des lokalen Flusses durch

$$A = \left\{ \bigcup_{p>0} \left(-\frac{1}{p}, \infty\right) \times p \right\} \cup \{(\mathbb{R} \times 0)\} \cup \left\{ \bigcup_{p<0} \left(-\infty, -\frac{1}{p}\right) \times p \right\}.$$

Insbesondere wird  $A$  durch die Hyperbeläste von  $-\frac{1}{p}$  berandet (siehe Abbildung 1.18).

Auf manchen Mannigfaltigkeiten induziert jedes Vektorfeld einen global definierten Fluss.

**Satz 1.3.9.** *Sei  $X$  ein Vektorfeld auf einer kompakten Mannigfaltigkeit  $M$ . Dann erzeugt  $X$  einen Fluss auf  $M$ .*

*Beweis.* Sei  $\varphi : A \rightarrow M$  der zu dem Vektorfeld  $X$  gehörige lokale Fluss. Da  $A \subset \mathbb{R} \times M$  offen ist und  $\{0\} \times M$  enthält, existiert zu jedem  $(0, p) \in \mathbb{R} \times M$  eine offene Umgebung  $U_p$  von  $p$  und ein offenes Intervall  $(-\epsilon_p, \epsilon_p)$  mit  $\epsilon_p > 0$ , so dass  $(-\epsilon_p, \epsilon_p) \times U_p \subset A$ . Da nach Definition die offenen Umgebungen  $U_p$  eine Überdeckung von  $M$  darstellen, existiert wegen der Kompaktheit von  $M$  eine endliche Teilüberdeckung  $U_{p_1}, \dots, U_{p_k}$ . Ist  $p \in U_{p_i}$ , so ist  $(-\epsilon_{p_i}, \epsilon_{p_i}) \subset I_p$ . Wählen wir  $\epsilon$  als das Minimum der  $\epsilon_{p_i}$ , so ist  $(-\epsilon, \epsilon) \subset I_p$  für alle  $p \in M$ , und nach Definition von  $A$  enthält  $A$  die Menge  $(-\epsilon, \epsilon) \times M$ . Wegen obiger Bemerkung (b) ist daher  $A = \mathbb{R} \times M$ .  $\square$

Nun zeigen wir, dass Vektorfelder sich durch ihre derivative Eigenschaft charakterisieren lassen. Dies wird bei der Definition der Lieklammer nützlich sein.

**Satz 1.3.10.** *(Charakterisierung von Vektorfeldern)*

*Sei  $\delta : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (a) *Es gibt ein  $X \in \Gamma(TM)$  mit  $X(f)(p) := X(p)(f) = \delta f(p)$ .*
- (b)  *$\delta$  ist eine Derivation, d.h.*

$$\delta(f \cdot g)(p) = f(p)\delta g(p) + g(p)\delta f(p).$$

*Beweis.* Die Implikation (a)  $\Rightarrow$  (b) sei als Übung überlassen. Für den Beweis der umgekehrten Implikation betrachte nun eine Derivation  $\delta : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ . Wir gehen in folgenden Schritten vor.

Schritt 1: Wir zeigen zunächst, dass  $\delta$  ein lokaler Operator ist, d.h. ist  $p \in M$  und  $f, \tilde{f} \in C^\infty(M)$  mit  $f|_U = \tilde{f}|_U$  für eine offene Umgebung  $U$  von  $p$ , so folgt:  $\delta f(p) = \delta \tilde{f}(p)$ .

*Beweis.* Indem man  $\tilde{f} - f$  betrachtet, genügt es zu zeigen: Ist  $p \in U$ ,  $U$  offen und  $f \in C^\infty(M)$  mit  $f|_U = 0$ , so folgt  $\delta f(p) = 0$ . Wähle eine Funktion  $g \in C^\infty(M)$  mit  $g(x) = 1$ , falls  $x \in M \setminus U$  und  $g(p) = 2$  (Warum existiert eine solche Funktion?). Dann gilt  $f \cdot g = f$  und

$$\delta f(p) = \delta(f \cdot g)(p) = \delta f(p) \cdot g(p) + \delta g(p) \cdot f(p) = 2\delta f(p)$$

Schritt 2: Es gilt:  $\delta(1)(p) = 0$  für alle  $p \in M$ , denn  $\delta(1)(p) = \delta(1 \cdot 1)(p) = 2\delta(1)(p)$ . Ist  $c \in \mathbb{R}$ , so folgt daher  $\delta(c)(p) = c \cdot \delta(1)(p) = 0$ .

Schritt 3: Sei  $p \in M$  und  $(x, U)$  eine Karte mit  $p \in U$ ,  $x(p) = 0$  und

$$x(U) = B(0, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < \epsilon\}.$$

Dann folgt

$$\delta f(p) = \sum_{i=1}^n \delta(x_i)(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p (f)$$

für alle  $f \in C^\infty(M)$ . Definiere  $X(p) \in T_p M$  durch

$$X(p) = \sum_{i=1}^n \delta(x_i)(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$$

Dann gilt  $X(p)(f) = \delta f(p)$  und da  $p$  beliebig folgt (a).

*Beweis.* Sei  $g \in C^\infty(B(0, \epsilon))$ . Dann folgt für  $u \in B(0, \epsilon)$

$$g(u) - g(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} g(ut) dt = \sum_{i=1}^n u_i \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial u_i}(ut) dt.$$

Sei  $f \in C^\infty(M)$ , so folgt für  $g = f \circ x^{-1}$  und alle  $u \in x(U) = B(0, \epsilon)$ :

$$f \circ x^{-1}(u) = f(p) + \sum_{i=1}^n u_i \int_0^1 \frac{\partial f \circ x^{-1}}{\partial u_i}(ut) dt.$$

Ist  $q = x^{-1}(u)$ , so folgt

$$f(q) = f(p) + \sum_{i=1}^n x_i(q) \int_0^1 \frac{\partial f \circ x^{-1}}{\partial u_i}(x(q)t) dt.$$

Wir wenden nun die Derivation  $\delta$  auf beide Seiten an. Die rechte Seite ist zwar nur auf  $U$  definiert, aber da wegen Schritt 1  $\delta$  ein lokaler Operator ist, ist die Anwendung auf die rechte Seite wohldefiniert. Aus Schritt 2 folgt dann unter Verwendung von  $x(p) = 0$

$$\begin{aligned} \delta f(p) &= \sum_{i=1}^n \delta(x_i)(p) \cdot \int_0^1 \frac{\partial f \circ x^{-1}}{\partial u_i}(0) dt \\ &= \sum_{i=1}^n \delta(x_i)(p) \frac{\partial f \circ x^{-1}}{\partial u_i}(0) \\ &= \sum_{i=1}^n \delta(x_i)(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p (f). \end{aligned}$$

□

## 1.4 Lieklammer

Eine wichtige Verknüpfung auf dem Raum der Vektorfelder ist die Lieklammer. Seien  $X, Y$  Vektorfelder, so ist  $XY : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  mit  $XY(f)(p) := X(Yf)(p)$  eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung, aber keine Derivation, sondern ein "Operator" 2. Ordnung. Überraschenderweise gilt aber der folgende Satz:

**Satz 1.4.1.** Sind  $X, Y$  Vektorfelder auf  $M$ , so ist  $[X, Y] : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  mit  $[X, Y](f) = (XY - YX)(f)$  eine Derivation und somit ein Vektorfeld.

Sind  $X(p) = \sum_{j=1}^n a_j(p) \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p$  und  $Y(p) = \sum_{j=1}^n b_j(p) \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p$  die lokalen Darstellungen von  $X$  und  $Y$  bezüglich einer Karte  $(x, U)$ , so folgt:

$$[X, Y](p) = \sum_{j=1}^n (X(b_j)(p) - Y(a_j)(p)) \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p.$$

Das Vektorfeld  $[X, Y]$  heißt Liesches Klammerprodukt bzw. Lieklammer.

*Beweis.*  $[X, Y]$  ist eine Derivation, denn

$$\begin{aligned}
 [X, Y](f \cdot g) &= (XY - YX)(f \cdot g) = X(fY(g) + gY(f)) - Y(fX(g) + gX(f)) \\
 &= fXY(g) + X(f)Y(g) + X(g)Y(f) + gXY(f) \\
 &\quad - Y(f)X(g) - fYX(g) - Y(g)X(f) - gYX(f) \\
 &= f(XY - YX)(g) + g(XY - YX)(f) \\
 &= f[X, Y](g) + g[X, Y](f).
 \end{aligned}$$

Sei  $(x, U)$  eine Karte, so gilt

$$[X, Y](p) = \sum_{j=1}^n c_j(p) \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p$$

mit

$$\begin{aligned}
 c_j(p) &= [X, Y](x_j)(p) = (XY - YX)(x_j)(p) \\
 &= X(Y(x_j))(p) - Y(X(x_j))(p) = X(b_j)(p) - Y(a_j)(p)
 \end{aligned}$$

falls  $X = \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial x_j}$  und  $Y = \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ . □

**Satz 1.4.2.** Die Lieklammer  $[\cdot, \cdot] : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$  definiert eine bilineare und schiefsymmetrische Abbildung. Darüberhinaus gilt für alle  $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$

(a) die Jacobiidentität, d.h. es ergibt sich

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

bei zyklischer Vertauschung.

(b) für alle  $f \in C^\infty(M)$  gilt

$$[X, fY] = f[X, Y] + X(f)Y.$$

*Beweis.* Die Bilinearität und Schiefsymmetrie ist direkte Konsequenz der Definition. Die Eigenschaften (a) und (b) überprüft man durch Nachrechnen. □

**Definition 1.4.3.** Ist  $V$  ein Vektorraum und  $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$  eine schiefsymmetrische und bilineare Abbildung, die die Jacobiidentität erfüllt, so nennt man das Paar  $(V, [\cdot, \cdot])$  eine Liealgebra.

Weitere Beispiele von Liealgebren sind neben den Vektorfeldern:

**Beispiele.** (a)  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $[v, w] = v \times w$  (Kreuzprodukt).

(b)  $V = M(n, \mathbb{R})$ ,  $[A, B] = AB - BA$ .

**Lemma 1.4.4.** Sei  $\varphi : M \rightarrow N$  ein Diffeomorphismus. Dann induziert  $\varphi$  eine lineare Abbildung  $\varphi_* : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TN)$  durch

$$(\varphi_* X)(q) = D\varphi(\varphi^{-1}(q))X(\varphi^{-1}(q))$$

Ist  $f \in C^\infty(N)$ , so gilt:

$$(\varphi_* X)(f)(q) = X(f \circ \varphi)(\varphi^{-1}(q)) \tag{1.5}$$

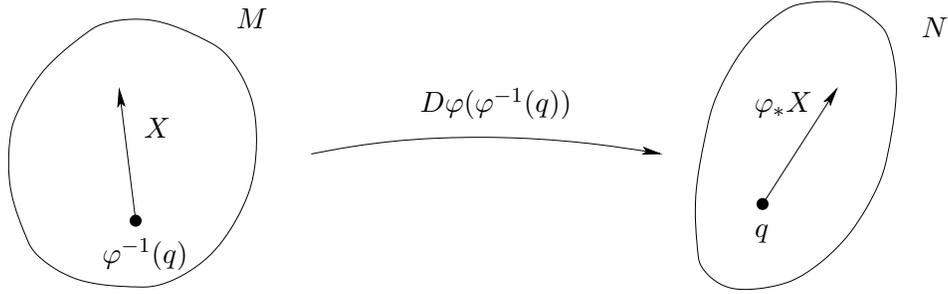


Abbildung 1.19:

*Beweis.* Da  $\varphi_*X(q) \in T_qN$  für alle  $q \in N$  und die Abbildung  $q \rightarrow \varphi_*X(q)$  differenzierbar ist, ist  $\varphi_*X \in \Gamma(TN)$ . Die Linearität von  $\varphi_*$  folgt aus der Linearität des Differentials. Sei  $f \in C^\infty(N)$ , so folgt

$$\begin{aligned} (\varphi_*X)(f)(q) &= \varphi_*X(q)(f) = D\varphi(\varphi^{-1}(q))X(\varphi^{-1}(q))(f) \\ &\stackrel{(1,2)}{=} X(\varphi^{-1}(q))(f \circ \varphi) = X(f \circ \varphi)(\varphi^{-1}(q)) \end{aligned}$$

□

**Satz 1.4.5.** Seien  $M, N$  Mannigfaltigkeiten und  $\varphi : M \rightarrow N$  ein Diffeomorphismus. Dann ist  $\varphi_* : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TN)$  ein Liealgebromorphismus, d.h.  $\varphi_*$  ist linear und es gilt

$$[\varphi_*X, \varphi_*Y] = \varphi_*[X, Y]$$

für alle  $X, Y \in \Gamma(TM)$ .

*Beweis.* Aus der Definition der Lieklammer folgt unter Benutzung von (1.5)

$$\begin{aligned} [\varphi_*X, \varphi_*Y](f)(q) &= \varphi_*X(\varphi_*Y(f))(q) - \varphi_*Y(\varphi_*X(f))(q) \\ &= X(\varphi_*Y(f) \circ \varphi)(\varphi^{-1}(q)) - Y(\varphi_*X(f) \circ \varphi)(\varphi^{-1}(q)) \\ &= X(Y(f \circ \varphi))(\varphi^{-1}(q)) - Y(X(f \circ \varphi))(\varphi^{-1}(q)) \\ &= (XY - YX)(f \circ \varphi)(\varphi^{-1}(q)) \\ &= \varphi_*[X, Y](f)(q). \end{aligned}$$

□

Man kann die Lieklammer auch mit Hilfe lokaler Flüsse beschreiben. Dazu benötigen wir den Begriff der Lieableitung.

**Definition 1.4.6.** Seien  $X, Y$  Vektorfelder und  $\varphi : A \rightarrow M$  der durch  $X$  induzierte lokale Fluss mit  $\varphi(t, p) = \varphi_t(p)$ . Betrachte für  $(t, p) \in A$  den Vektor

$$(\varphi_{-t})_*Y(p) = D\varphi_{-t}(\varphi_t(p))(Y(\varphi_t(p))) \in T_pM$$

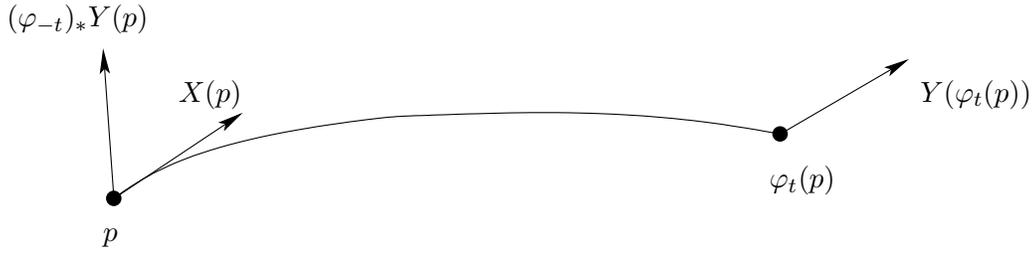


Abbildung 1.20:

Dann heißt das Vektorfeld

$$L_X Y(p) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} D\varphi_{-t}(\varphi_t(p))(Y(\varphi_t(p))) \in T_p M$$

die *Lieableitung* von  $Y$  in Richtung  $X$ .

**Satz 1.4.7.** *Seien  $X, Y$  Vektorfelder auf  $M$  und  $\varphi : A \rightarrow M$  der zu  $X$  und  $\psi : B \rightarrow M$  der zu  $Y$  gehörige lokale Fluss. Dann gilt:*

(a)  $L_X Y(p) = [X, Y](p)$  für alle  $p \in M$ .

(b) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i)  $[X, Y](p) = 0$  für alle  $p \in M$ .

(ii)  $\varphi_t \psi_s(p) = \psi_s \varphi_t(p)$  für alle  $t, s, p$ , für die beide Seiten definiert sind.

*Beweis.* (a) Seien  $X, Y$  Vektorfelder auf  $M$  und  $\varphi : A \rightarrow M$ ,  $\psi : B \rightarrow M$  die zugehörigen lokale Flüsse. Dann gilt:

$$L_X Y(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} D\varphi_{-t}(\varphi_t(p))(Y(\varphi_t(p))).$$

Sei  $f \in C^\infty(M)$ , so folgt

$$\begin{aligned} L_X Y(p)f &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} D\varphi_{-t}(\varphi_t(p))(Y(\varphi_t(p)))(f) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Y(\varphi_t(p))(f \circ \varphi_{-t}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y(\varphi_t(p))f \circ \varphi_{-t} - Y(p)(f)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} Y(\varphi_t(p)) \left( \frac{f \circ \varphi_{-t} - f}{t} \right) + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(Yf)(\varphi_t(p)) - (Yf)(p)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} Y(\varphi_t(p)) \left( \frac{f \circ \varphi_{-t} - f}{t} \right) + XY(f)(p). \end{aligned}$$

Betrachte die  $C^\infty$ -Funktion  $a : A \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch die Taylorreihe

$$f \circ \varphi_{-t}(q) = f(q) - tXf(q) + t^2 a(-t, q).$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} Y(\varphi_t(p)) \left( \frac{f \circ \varphi_{-t} - f}{t} \right) &= \lim_{t \rightarrow 0} Y(\varphi_t(p))(-Xf + ta(-t, \cdot)) \\ &= -Y(p)(Xf) + \lim_{t \rightarrow 0} tY(\varphi_t(p))(a(-t, \cdot)) = -Y(Xf)(p). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$L_X Y(p)f = -YX(f)(p) + XY(f)(p) = (XY - YX)f(p) = [X, Y](f)(p).$$

(b) Für festes  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$  definiert  $h_s^t(p) = \varphi_{-t}\psi_s\varphi_t(p)$  einen lokalen Fluß, denn

$$h_{s_1+s_2}^t(p) = \varphi_{-t}\psi_{s_1+s_2}\varphi_t(p) = \varphi_{-t}\psi_{s_1}\varphi_t\varphi_{-t}\psi_{s_2}\varphi_t(p) = h_{s_1}^t h_{s_2}^t(p)$$

Der Fluß  $h_s^t$  wird von dem Vektorfeld

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} h_s^t(p) = D\varphi_{-t}(\varphi_t(p))Y(\varphi_t(p))$$

erzeugt. Ist  $\varphi_t\psi_s(p) = \psi_s\varphi_t(p)$ , so folgt

$$D\varphi_{-t}(\varphi_t(p))Y(\varphi_t(p)) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} h_s^t(p) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \psi_s(p) = Y(p)$$

und daher

$$[X, Y](p) = L_X Y(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} D\varphi_{-t}(\varphi_t(p))Y(\varphi_t(p)) = 0.$$

Ist  $[X, Y](p) = 0$  für alle  $p \in M$ , so betrachte  $Z(t) = D\varphi_{-t}(\varphi_t(p))Y(\varphi_t(p)) \in T_p M$ . Die Kurve  $t \mapsto Z(t)$  ist konstant, denn

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} D\varphi_{-t}(\varphi_t(p))Y(\varphi_t(p)) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} D\varphi_{-t_0-t}(\varphi_{t_0+t}(p))Y(\varphi_t\varphi_{t_0}(p)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} D(\varphi_{-t_0} \circ \varphi_{-t})(\varphi_{t_0+t}(p))Y(\varphi_t\varphi_{t_0}(p)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} D\varphi_{-t_0}(\varphi_{t_0}(p))D\varphi_{-t}(\varphi_t\varphi_{t_0}(p))Y(\varphi_t\varphi_{t_0}(p)) \\ &= D\varphi_{-t_0}(\varphi_{t_0}(p)) \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} D\varphi_{-t}(\varphi_t\varphi_{t_0}(p))Y(\varphi_t\varphi_{t_0}(p)) \\ &= D\varphi_{-t_0}(\varphi_{t_0}(p))([X, Y](\varphi_{t_0}(p))) = 0. \end{aligned}$$

Also folgt  $Z(t) = Z(0) = Y(p)$ , und somit gilt für alle  $s, t, p$ , für die  $\psi_s(p)$  sowie  $h_s^t(p)$  definiert sind

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} h_s^t(p) = Y(p).$$

Damit stimmen für jedes gegeben  $t$  die infinitesimalen Erzeuger der Flüsse  $h_s^t$  und  $\psi_s$  überein und wir erhalten

$$\varphi_{-t}\psi_s\varphi_t(p) = h_s^t(p) = \psi_s(p).$$

## Kapitel 2

# Riemannsche Mannigfaltigkeiten

In diesem Kapitel kommen wir zum fundamentalen Begriff der Differentialgeometrie, nämlich dem Begriff der Riemannschen Metrik. Mit der Wahl einer Riemannschen Metrik auf einer Mannigfaltigkeit wird diese zu einem geometrischen Objekt. Die Riemannsche Metrik erlaubt, ähnlich wie in Euklidischen Vektorräumen (Vektorräume mit Skalarprodukt), das Messen von Winkeln, die Bestimmung der Längen von Kurven, das Berechnen der Krümmung und vieles mehr.

### 2.1 Riemannsche Metrik

**Definition 2.1.1.** Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit. Eine *Riemannsche Metrik*  $g = \{g_p\}_{p \in M}$  ist eine Familie von Skalarprodukten

$$g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R},$$

so dass für alle differenzierbaren Vektorfelder  $X, Y : M \rightarrow TM$  die Abbildung  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(p) = g_p(X(p), Y(p))$$

differenzierbar ist. Eine Mannigfaltigkeit  $M$  mit einer Riemannschen Metrik heißt *Riemannsche Mannigfaltigkeit*.

**Bemerkungen.** (a) Ist  $\mathcal{A}$  ein Atlas von  $M$ , so ist  $g$  genau dann differenzierbar, wenn für alle Karten  $(x, U) \in \mathcal{A}$  die Abbildungen

$$g_{ij}(p) = g_p \left( \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p, \left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_p \right)$$

auf  $U$  differenzierbar sind.

(b) Manchmal schreiben wir auch  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  statt  $g$  und  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  statt  $g_p$ .

(c) In der Relativitätstheorie betrachtet man auch indefinite Formen auf Mannigfaltigkeiten, z.B.  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i - x_4 y_4$  auf dem  $\mathbb{R}^4$  (Lorentzmetrik).

Jeder Euklidische Vektorraum  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  mit einem Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  definiert eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Insbesondere werden wir den  $\mathbb{R}^n$  mit dem Standardskalarprodukt  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$  betrachten. Eine umfangreiche Beispielklasse von Riemannschen Metriken erhält man wie folgt:

**Satz 2.1.2.** *Es sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit,  $(N, h)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, und  $\varphi : M \rightarrow N$  eine Immersion. Dann induziert  $(N, h)$  mittels  $\varphi$  eine Metrik  $g$  auf  $M$  durch*

$$g_p(v, w) := h_{\varphi(p)}(D\varphi(p)v, D\varphi(p)w).$$

*Die Metrik  $g$  nennt man auch die durch  $\varphi$  auf  $M$  zurückgeholte Metrik  $h$  (pullback metric). Wir bezeichnen sie auch mit  $\varphi^*h$ . Die Abbildung  $\varphi : (M, g) \rightarrow (N, h)$  nennen wir isometrische Immersion.*

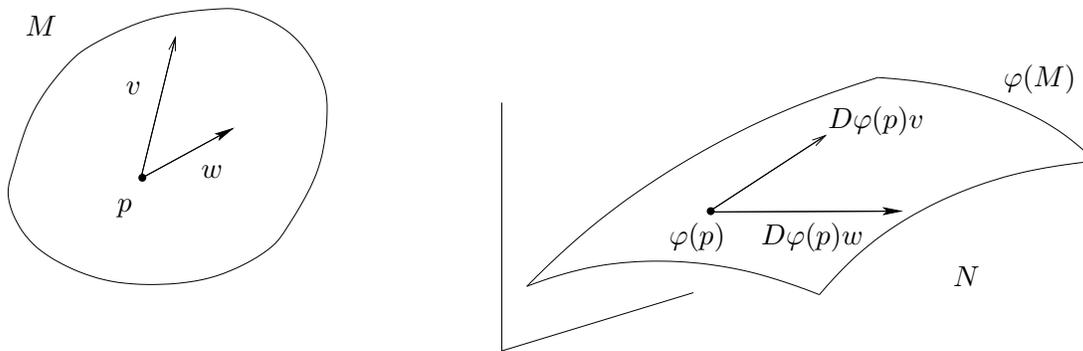


Abbildung 2.1:

*Beweis.* Für jedes  $p \in M$  ist  $g_p$  wegen der Linearität und Injektivität des Differentials  $D\varphi(p) : T_pM \rightarrow T_{\varphi(p)}N$  bilinear und positiv definit. Die Symmetrie folgt aus der Symmetrie von  $h$ . Außerdem ist  $g$  differenzierbar, denn ist  $(x, U)$  eine Karte von  $M$ ,  $(y, V)$  eine Karte von  $N$  mit  $\varphi(U) \subset V$  und

$$D\varphi(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p = \sum_{k=1}^n a_{ki}(p) \frac{\partial}{\partial y_k} \Big|_{\varphi(p)},$$

so ist

$$g_p \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right) = h_{\varphi(p)} \left( \sum_{k=1}^n a_{ki}(p) \frac{\partial}{\partial y_k} \Big|_{\varphi(p)}, \sum_{l=1}^n a_{lj}(p) \frac{\partial}{\partial y_l} \Big|_{\varphi(p)} \right)$$

differenzierbar auf  $U$ . □

**Bemerkung.** Ist insbesondere  $M \subset N$  eine Untermannigfaltigkeit einer Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(N, h)$ , so ist die Inklusion  $i : M \rightarrow N$  eine Einbettung, und wir können für jedes  $p \in M$  den Tangentialraum  $T_pM$  als Teilmenge von  $T_pN$  auffassen. Die auf  $M$  durch  $(N, h)$  induzierte Metrik ist durch

$$g_p(v, w) = h_p(v, w)$$

für  $v, w \in T_pM$  gegeben. Wir nennen dann  $i : (M, g) \rightarrow (N, h)$  eine isometrische Einbettung. Betrachtet man zum Beispiel  $m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeiten  $M^m \subset \mathbb{R}^n$  des  $\mathbb{R}^n$  mit dem Standardskalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , so nennen wir

$$g_p(v, w) = \langle v, w \rangle$$

die durch den  $\mathbb{R}^n$  auf  $M$  induzierte Metrik. Diese Metriken sind für Flächen im  $\mathbb{R}^3$  in der Vorlesung “Kurven und Flächen” intensiv studiert worden.

Weitere Riemannsche Metriken erhalten wir durch Addition Riemannscher Metriken und Multiplikation mit positiven Funktionen.

**Satz 2.1.3.** Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit mit Riemannschen Metriken  $g, h$ . Dann ist auch  $g + h$  mit

$$(g + h)_p = g_p + h_p$$

eine Riemannsche Metrik. Ist  $f : M \rightarrow (0, \infty)$  eine  $C^\infty$ -Funktion in die positiven reellen Zahlen, so ist auch  $f \cdot g$  mit

$$(f \cdot g)_p = f(p)g_p$$

eine Riemannsche Metrik. Die Metriken  $g$  und  $f \cdot g$  heißen dann konform äquivalent.

Wir wollen Riemannsche Mannigfaltigkeiten als gleichwertig ansehen, wenn sie isometrisch sind.

**Definition 2.1.4.** Es seien  $(M, g)$  und  $(N, h)$  Riemannsche Mannigfaltigkeiten.

- (a) Ein Diffeomorphismus  $\varphi : M \rightarrow N$  heißt *Isometrie*, falls für alle  $p \in M$  und  $v, w \in T_p M$  gilt

$$h_{\varphi(p)}(D\varphi(p)v, D\varphi(p)w) = g_p(v, w).$$

Ist  $\varphi : M \rightarrow N$  eine Isometrie, so heißen  $M$  und  $N$  *isometrisch*.

- (b) Eine differenzierbare Abbildung  $\varphi : M \rightarrow N$  heißt *lokale Isometrie*, falls für alle  $p \in M$  eine offene Umgebung  $U$  von  $p$  existiert, so dass  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$  eine Isometrie ist.
- (c) Die Menge aller Isometrien

$$\text{Iso}(M, g) = \{\varphi : M \rightarrow M \mid \varphi \text{ Isometrie}\}$$

auf  $M$  ist eine Untergruppe der Diffeomorphismengruppe  $\text{Diff}(M)$ . Sie heißt *Isometrie-gruppe*.

**Bemerkungen.** (a) Ist  $\varphi : (M, g) \rightarrow (N, h)$  eine (lokale) Isometrie, so ist für alle  $p \in M$  das Differential

$$D\varphi(p) : (T_p M, g_p) \rightarrow (T_{\varphi(p)} N, h_{\varphi(p)})$$

eine lineare Isometrie zwischen den euklidischen Vektorräumen  $(T_p M, g_p)$  und  $(T_{\varphi(p)} N, h_{\varphi(p)})$ . Insbesondere ist  $\varphi^* h = g$ .

- (b) Die Riemannschen Mannigfaltigkeiten  $(\mathbb{R}^2, \langle, \rangle)$  und

$$S^1 \times \mathbb{R} = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mid u^2 + v^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$$

bezüglich der durch den  $\mathbb{R}^3$  induzierten Metrik sind lokal isometrisch, aber nicht global isometrisch. Die Abbildung  $\varphi : \mathbb{R}^2 \mapsto S^1 \times \mathbb{R}$  mit  $\varphi(x, y) = (\cos(x), \sin(x), y)$  definiert eine lokale Isometrie (nachrechnen!).

**Euklidischer Raum und die Sphäre**

Neben dem  $(\mathbb{R}^n, \langle, \rangle)$  mit der Standardmetrik  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$  ist die Standardsphäre  $(S^n, g)$

ein wichtiges klassisches Beispiel einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. Die Standardsphäre  $(S^n, g)$  ist die Untermannigfaltigkeit

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$$

von  $\mathbb{R}^{n+1}$  zusammen mit der durch den  $\mathbb{R}^{n+1}$  induzierten Metrik

$$g_p(v, w) = \langle v, w \rangle \quad v, w \in T_p S^n.$$

Wir werden sehen, dass Riemannsche Mannigfaltigkeiten der Krümmung 0 bzw. der Krümmung +1 lokal isometrisch zu  $(\mathbb{R}^n, \langle, \rangle)$  bzw. zu  $(S^n, g)$  sind.

### Der hyperbolische Raum.

Das Gegenstück zur Standardsphäre  $S^n$  mit Krümmung +1 ist der  $n$ -dimensionale hyperbolische Raum  $H^n$ . Er hat, wie wir später sehen werden, die Krümmung  $-1$ . Im Gegensatz zur  $n$ -dimensionalen Sphäre läßt sich  $H^n$  nicht isometrisch in den  $\mathbb{R}^{n+1}$  einbetten.

Es existieren verschiedene gebräuchliche Modelle des hyperbolischen Raumes. Diese sind natürlich alle paarweise isometrisch.

(a) Hyperboloid-Modell: Betrachte auf  $\mathbb{R}^{n+1}$  die indefinite symmetrische Form

$$q(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i - x_{n+1} y_{n+1}$$

und definiere

$$H^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid q(x, x) = -1, x_{n+1} > 0\}.$$

Also besteht  $H^n$  aus allen  $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$  mit  $x_{n+1} > 0$  und

$$x_{n+1}^2 = 1 + \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

**Übungen.** • Zeige:  $H^n$  ist eine Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

• Definiere für  $v, w \in T_x H^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  und  $x \in H^n$

$$h_x(v, w) = q(v, w).$$

Zeige:  $h := \{h_x\}_{x \in H^n}$  definiert eine Riemannsche Metrik auf  $H^n$ .

(b) Poincaré-Modell (Ballmodell): Betrachte den offenen Ball

$$B_1^n(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$$

in  $\mathbb{R}^n$  mit Mittelpunkt 0 und Radius 1 zusammen mit der Riemannschen Metrik

$$g_x(v, w) = \frac{4}{(1 - \langle x, x \rangle)^2} \cdot \langle v, w \rangle, \quad ,$$

wobei  $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n v_i w_i$  das Standardskalarprodukt des  $\mathbb{R}^n$  ist. Insbesondere ist die Metrik  $g$  auf  $B_1^n(0)$  konform äquivalent zur Standardmetrik des  $\mathbb{R}^n$ .

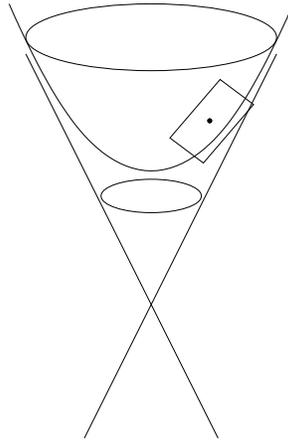


Abbildung 2.2:

**Übung.** Zeige, dass  $(B_1^n(0), g)$  zu  $H^n$  isometrisch ist. Dazu betrachte die sogenannte hyperbolische stereographische Projektion

$$s : H^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

von  $-e_{n+1} = (0, \dots, 0, -1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Dabei sei  $s(x)$  der Schnittpunkt der Geraden durch  $x \in H^n$  und  $-e_{n+1}$  mit  $\mathbb{R}^n \times \{0\} \cong \mathbb{R}^n$ . Dann gilt:  $s(x)$  liegt in  $B^n(0, 1)$ , und  $s : H^n \rightarrow B^n(0, 1)$  ist eine Isometrie.

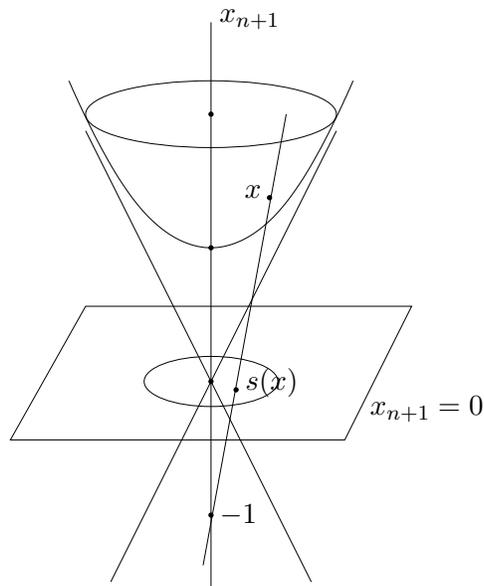


Abbildung 2.3:

(c) Halbraummodell: Betrachte den Halbraum

$$\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$$

mit der Riemannschen Metrik

$$g_x(v, w) = \frac{\langle v, w \rangle}{x_n^2}.$$

Man kann zeigen, dass  $(\mathbb{R}_+^n, g)$  isometrisch ist zu  $(H^n, h)$ . Wie man sieht ist diese Metrik auf  $\mathbb{R}_+^n$  konform äquivalent zur Standardmetrik des  $\mathbb{R}^n$ .

**Satz 2.1.5.** (Produktmetriken)

Seien  $(M, g)$  und  $(N, h)$  zwei Riemannsche Mannigfaltigkeiten,  $\mathcal{A}_M = \{(x, U)\}$  ein Atlas für  $M$  und  $\mathcal{A}_N = \{(y, V)\}$  ein Atlas für  $N$ . Dann definiert

$$\mathcal{A}_M \times \mathcal{A}_N = \{(x \times y, U \times V) \mid (x, U) \in \mathcal{A}_M, (y, V) \in \mathcal{A}_N\}$$

einen Atlas für  $M \times N$ , wobei die Karte  $x \times y$  gegeben ist durch  $x \times y(p, q) = (x(p), y(q))$ . Betrachte die Projektionen  $\pi_1 : M \times N \rightarrow M$ ,  $\pi_2 : M \times N \rightarrow N$ . Dann ist

$$D\pi_1(p, q) \times D\pi_2(p, q) : T_{(p,q)}M \times N \rightarrow T_pM \times T_qN$$

mit

$$v \rightarrow (D\pi_1(p, q)v, D\pi_2(p, q)v) =: (v_1, v_2),$$

für alle  $(p, q) \in M \times N$  ein Isomorphismus. Ausserdem definiert für  $u = (u_1, u_2)$ ,  $v = (v_1, v_2) \in T_pM \times T_qN$

$$(g \times h)_{(p,q)}(u, v) = g_p(u_1, v_1) + h_q(u_2, v_2)$$

eine Riemannsche Metrik, genannt Produktmetrik auf  $M \times N$ .

## 2.2 Riemannsche Mannigfaltigkeiten und Gruppenoperationen

Wichtige Beispiele von Mannigfaltigkeiten und Riemannschen Mannigfaltigkeiten erhält man durch gewisse Gruppenoperationen.

**Definition 2.2.1.** Sei  $G$  eine Gruppe und  $M$  eine Mannigfaltigkeit. Eine *Gruppenoperation* (*Gruppenaktion*, *Gruppenwirkung*) von  $G$  auf  $M$  ist ein Gruppenhomomorphismus  $\phi : G \rightarrow \text{Diff}(M)$  mit  $a \mapsto \phi(a) = \phi_a$ , d.h.

$$\phi_{a_1 a_2}(x) = \phi_{a_1} \circ \phi_{a_2}(x)$$

für alle  $a_1, a_2 \in G$  und  $x \in M$ . Wir sagen auch, dass  $G$  als Gruppe von Diffeomorphismen auf  $M$  operiert, und schreiben statt  $\phi_a(x)$  auch kurz  $ax$ . Ist  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $\phi(G) \subset \text{Iso}(M, g)$ , so sagen wir, dass  $G$  als Gruppe von Isometrien auf  $M$  operiert oder auch isometrisch operiert.

**Bemerkungen.** (a) Ist  $\phi : G \rightarrow \text{Diff}(M)$  und  $e$  das neutrale Element in  $G$ , so ist insbesondere  $\phi_e = \text{id}$ . Die Gruppenoperation heißt *effektiv*, falls der Kern von  $\phi$  nur aus dem neutralen Element von  $G$  besteht. Mit anderen Worten, das einzige Element  $a \in G$  mit  $\phi_a = \text{id}$  ist das neutrale Element.

(b) Ist  $x \in M$ , so heißt

$$Gx := \{ax \mid a \in G\}$$

der *Orbit* oder die *Bahn* von  $x$  unter  $G$ , (man spricht manchmal auch vom  $G$ -Orbit von  $x$ ). Wir sagen, dass  $G$  *transitiv* operiert, falls nur ein Orbit existiert, d.h.  $Gx = M$  für ein  $x \in M$ .

(c) Die Menge

$$G_x := \{a \in G \mid ax = x\}$$

ist eine Untergruppe von  $G$ . Sie heißt *Isotopiegruppe* (*Standgruppe*) von  $G$  bezüglich  $x$ .

(d) Die Orbits von  $G$  definieren eine Partition von  $M$ , denn die Relation

$$x \sim y :\Leftrightarrow y \in Gx$$

ist eine Äquivalenzrelation auf  $M$ . Die Menge der Äquivalenzklassen  $M/G$  bestehen also

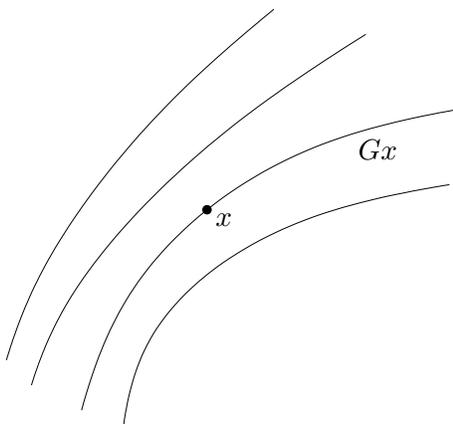


Abbildung 2.4:

aus den Orbits von  $G$  (siehe Abbildung 2.4). Die surjektive Abbildung

$$\pi : M \rightarrow M/G \quad \text{mit} \quad x \mapsto [x] := Gx$$

heißt *kanonische Projektion*. Diese Projektion induziert eine Topologie auf  $M/G$  (Quotiententopologie). Dabei sei

$$V \subset M/G \text{ offen} \Leftrightarrow \pi^{-1}(V) \subset M \text{ offen.}$$

Insbesondere wird  $\pi$  zu einer stetigen Abbildung. Sie ist aber auch offen, d.h.  $\pi$  bildet offene Mengen auf offene Mengen ab. Denn ist  $U \subset M$  offen, so ist

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{a \in G} aU$$

als Vereinigung offener Mengen wieder offen in  $M$ , und somit ist  $\pi(U)$  offen in  $M/G$ . Allerdings hat im Allgemeinen der topologische Raum  $M/G$  keine guten Eigenschaften. Wie das Beispiel in Abbildung 2.5 zeigt, muss  $M/G$  kein Hausdorffraum sein.

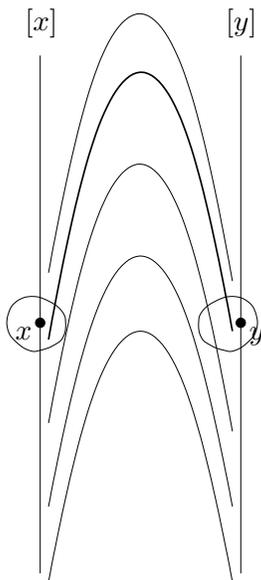


Abbildung 2.5:

Von besonderem Interesse sind Gruppen mit differenzierbarer Struktur.

**Definition 2.2.2.** Eine Gruppe  $G$  heißt *Liegruppe*, falls  $G$  eine Mannigfaltigkeit ist mit differenzierbarer Gruppenstruktur, d.h. die Abbildung  $G \times G \rightarrow G$  mit

$$(a, b) \mapsto ab^{-1}$$

ist differenzierbar. Ist  $M$  eine Mannigfaltigkeit, so sagen wir, dass  $G$  als Liegruppe auf  $M$  operiert, falls eine Gruppenoperation  $\phi : G \rightarrow \text{Diff}(M)$  existiert, so dass die Abbildung

$$(a, x) \mapsto \phi_a(x) = ax$$

differenzierbar ist.

**Beispiele.** (a) Sei  $X$  ein differenzierbares Vektorfeld auf  $M$ , das einen globalen Fluss  $\psi$  auf  $M$  erzeuge. Dann definiert  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \text{Diff}(M)$  mit  $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} \psi_t(x) = X(x)$  eine Gruppenoperation der Liegruppe  $(\mathbb{R}, +)$  auf  $M$ .

(b) Die Gruppe

$$O(n) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle\} = \{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid A^T A = \text{id}\}$$

ist eine Liegruppe bezüglich der Matrixmultiplikation als Gruppenstruktur. Sei  $(S^n, g)$  die Einheitskugel in  $\mathbb{R}^{n+1}$  mit der durch den  $\mathbb{R}^{n+1}$  induzierten Riemannschen Metrik  $g$ , so definiert die Abbildung

$$O(n+1) \times S^n \rightarrow S^n \quad \text{mit} \quad (A, x) \mapsto Ax$$

eine isometrische Gruppenoperation, denn jedes  $A \in O(n+1)$  läßt das Standardskalarprodukt des  $\mathbb{R}^{n+1}$  invariant.

(c) Sei  $q(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i - x_{n+1} y_{n+1}$  die Lorentzmetrik auf  $\mathbb{R}^{n+1}$ . . Dann ist

$$O(n, 1) = \{A \in M(n + 1, \mathbb{R}) \mid q(Ax, Ay) = q(x, y)\}$$

eine Liegruppe (im Gegensatz zu  $O(n)$  ist diese nicht kompakt). Betrachte den hyperbolischen Raum

$$H^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid q(x, x) = -1, x_{n+1} > 0\}.$$

mit der durch  $q$  induzierten Metrik

$$g_x(v, w) = q(v, w), v, w \in T_x H^n .$$

Betrachte die Untergruppe  $O_+(n, 1)$  von  $O(n, 1)$ , die  $H^n$  invariant läßt. Diese ist gegeben durch

$$O_+(n, 1) := \{A \in O(n, 1) \mid (Ax)_{n+1} > 0, \text{ falls } x_{n+1} > 0 \text{ und } q(x, x) = -1\}.$$

Dann definiert

$$\begin{aligned} O_+(n, 1) \times H^n &\rightarrow H^n \\ (A, x) &\mapsto Ax \end{aligned}$$

eine isometrische Gruppenoperation auf  $H^n$ .

Neben den Gruppenoperationen von kontinuierlichen Gruppen sind wir auch an Operationen von diskreten Gruppen interessiert.

**Definition 2.2.3.** Eine Gruppe  $G$  heißt *diskret*, wenn  $G$  ein diskreter topologischer Raum ist. Ein topologischer Raum heißt *diskret*, falls alle seine Teilmengen offen sind.

**Bemerkung.** Mit der Relativtopologie von  $\mathbb{R}$  wird  $(\mathbb{Z}, +)$  zu einer diskreten Gruppe. Auf der anderen Seite ist  $(\mathbb{R}, +)$  eine Liegruppe. In einem diskreten Raum ist jede Teilmenge auch abgeschlossen und jede kompakte Menge ist endlich.

Insbesondere sind wir an solchen Gruppenoperationen interessiert, für die der Quotientenraum eine Mannigfaltigkeit darstellt. Dazu sind die Begriffe der eigentlichen und fixpunktfreien Gruppenoperationen zentral.

**Definition 2.2.4.** Sei  $G$  eine diskrete Gruppe oder eine Liegruppe, die auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  als Gruppe von Diffeomorphismen durch  $(a, x) \mapsto ax$  operiert.

(a) Die Gruppenoperation heißt *eigentlich*, wenn für jede kompakte Teilmenge  $K \subset M$  die Menge

$$G_K := \{a \in G \mid aK \cap K \neq \emptyset\}$$

kompakt ist.

(b) Wir sagen, dass  $G$  *fixpunktfrei* (*frei*) operiert, falls für alle  $x \in M$  die Isotropiegruppe trivial ist, d.h.  $G_x$  besteht nur aus dem neutralen Element.

**Bemerkungen.** 1. Für jede kompakte Teilmenge  $K \subset M$  ist  $G_K \subset G$  abgeschlossen. Denn sei  $(a_n)$  eine konvergente Folge in  $G$  mit  $a_n \in G_K$  so ist auch ihr Grenzwert  $a \in G_K$ . Denn ist  $a_n \in K$  so existieren  $x_n, y_n \in K$  mit  $a_n x_n = y_n$ . Aus der Kompaktheit von  $K$  folgt die Existenz von Teilfolgen  $x_{n_j}$  bzw.  $y_{n_j}$  deren Grenzwerte  $x$  bzw.  $y$  in  $K$  liegen. Wegen der Stetigkeit der Gruppenoperation gilt somit auch  $ax = y$ , d.h.  $a \in G_K$ .

2. Sei  $\Gamma$  eine diskrete Gruppe, die auf  $M$  operiert. Wegen obiger Bemerkung ist diese Operation genau dann eigentlich, falls für jede kompakte Teilmenge  $K \subset M$  die Menge

$$\Gamma_K = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma K \cap K \neq \emptyset\}$$

endlich ist. Insbesondere operiert eine diskrete Gruppe  $\Gamma$  auf einer kompakten Mannigfaltigkeit genau dann eigentlich, falls  $\Gamma$  endlich ist. Eigentliche Gruppenaktionen von diskreten Gruppen nennt man manchmal auch *eigentlich diskontinuierlich*.

**Lemma 2.2.5.** *Sei  $G$  eine diskrete Gruppe oder eine Liegruppe, die eigentlich auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  operiert. Dann ist  $M/G$  ein Hausdorffraum.*

*Beweis.* Angenommen,  $M/G$  wäre kein Hausdorffraum. Dann existieren  $x, y \in M$  mit  $[x] \neq [y]$ , so dass für alle offenen Umgebungen  $U \subset M/G$  von  $[x]$  und  $V \subset M/G$  von  $[y]$  der Durchschnitt  $U \cap V$  nicht leer ist. Wähle nun Folgen von offenen Umgebungen  $U_n \subset M$  von  $x$  und  $V_n \subset M$  von  $y$  mit  $U_{n+1} \subset U_n$ ,  $V_{n+1} \subset V_n$ ,  $\bar{U}_1, \bar{V}_1$  kompakt, sowie

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = \{x\} \quad \text{und} \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n = \{y\}.$$

Dann erhalten wir

$$\left( \bigcup_{a \in G} aU_n \right) \cap \left( \bigcup_{a \in G} aV_n \right) \neq \emptyset$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Also existieren Folgen  $x_n \in U_n$  und  $y_n \in V_n$  sowie eine Folge von Gruppenelementen  $a_n \in G$  mit  $a_n x_n = y_n$ . Da  $U_n \cup V_n \subset \bar{U}_1 \cup \bar{V}_1 =: K$ , folgt  $a_n K \cap K \neq \emptyset$ . Da  $K$

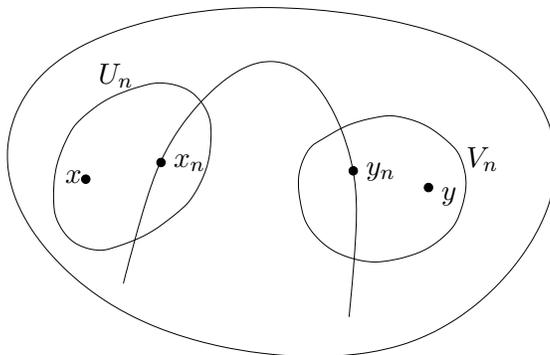


Abbildung 2.6:

kompakt ist und  $G$  eigentlich auf  $M$  operiert, besitzt  $(a_n)$  eine konvergente Teilfolge und somit existiert nach Übergang zur Teilfolge ein  $a \in G$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . Wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$  folgt  $ax = y$  aus der Stetigkeit der Gruppenoperation und somit  $[x] = [y]$  im Widerspruch zu  $[x] \neq [y]$ .  $\square$

Die Bahnen von eigentlichen Gruppenoperationen diskreter Gruppen sind diskrete Mengen. Genauer gilt:

**Lemma 2.2.6.** Sei  $\Gamma$  eine diskrete Gruppe, die eigentlich auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  operiert. Ist  $x \in M$  und  $\Gamma_x$  die Isotropiegruppe von  $x$ , so existiert eine offene Umgebung  $U$  von  $x$  mit

$$\gamma U \cap U = \emptyset$$

für alle  $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_x$ .

*Beweis.* Wähle eine kompakte Menge  $K$ , die eine offene Umgebung von  $U_x$  von  $x$  enthält. Nach Voraussetzung ist die Menge

$$\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma K \cap K \neq \emptyset\}$$

endlich. Betrachte die Teilmenge

$$\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma K \cap K \neq \emptyset\} \setminus \Gamma_x =: \{\gamma_1, \dots, \gamma_l\}.$$

Wähle eine offene Umgebung  $U_0 \subset U_x$  von  $x$  und offene Umgebungen  $V_i$  von  $\gamma_i(x)$  mit

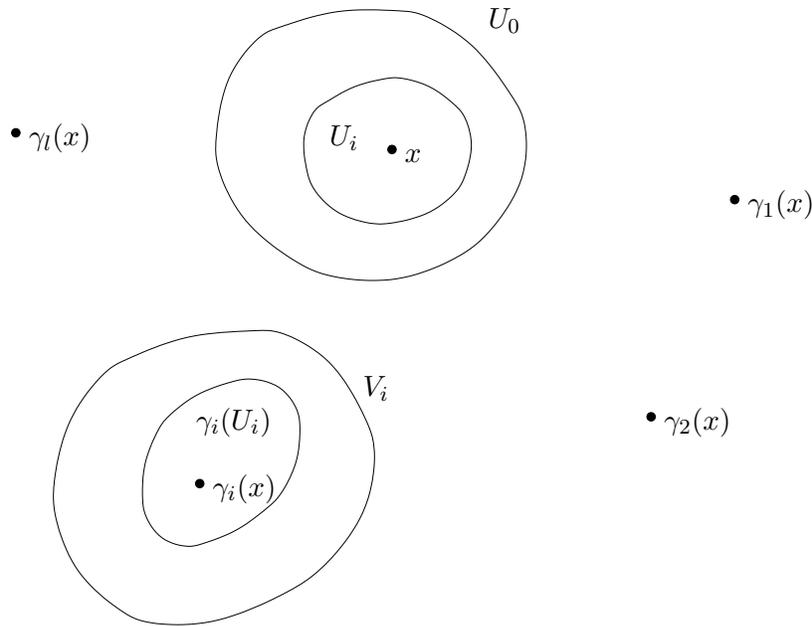


Abbildung 2.7:

$U_0 \cap V_i = \emptyset$ . Wegen der Stetigkeit der Operation von  $\gamma_i$  bilden die Mengen  $U_i := U_0 \cap \gamma_i^{-1}(V_i)$  offene Umgebungen von  $x$  mit  $U_i \subset U_0$  und  $\gamma_i(U_i) \subset V_i$  (siehe Abbildung 2.7). Setze

$$U = \bigcap_{i=1}^l U_i \subset U_0.$$

Dann folgt

$$\gamma_i U \cap U \subset V_i \cap U \subset V_i \cap U_0 = \emptyset$$

für alle  $i \in \{1, \dots, l\}$ . □

Gruppen, die fixpunktfrei und eigentlich auf Mannigfaltigkeiten operieren, kann man neue Mannigfaltigkeiten zuordnen. Für diskrete Gruppen gilt der folgende Satz.

**Satz 2.2.7.** *Sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und  $\Gamma$  eine diskrete Gruppe, die eigentlich und fixpunktfrei auf  $M$  operiert. Dann existiert auf  $M/\Gamma$  genau eine differenzierbare Struktur, so dass die Projektion*

$$\pi : M \rightarrow M/\Gamma$$

*ein lokaler Diffeomorphismus ist.*

*Beweis.* Sei  $\pi : M \rightarrow M/\Gamma$  die Quotientenabbildung. Auf  $M/\Gamma$  sei die Quotiententopologie gegeben. Dann folgt:

- $\pi : M \rightarrow M/\Gamma$  ist stetig
- Ist  $U \subset M$  offen, so dass  $\gamma U \cap U = \emptyset$  für alle  $\gamma \neq \text{id}$ , so ist

$$\pi|_U : U \rightarrow \pi(U) \subset M/\Gamma$$

ein Homöomorphismus. Denn ist  $\pi(x) = \pi(y)$  für  $x, y \in U$ , so existiert ein  $\gamma \in \Gamma$  mit  $\gamma(x) = y$ . Also ist  $\gamma = \text{id}$  und  $x = y$ .

Eine differenzierbare Struktur erhält man wie folgt. Wähle auf  $M$  einen Atlas

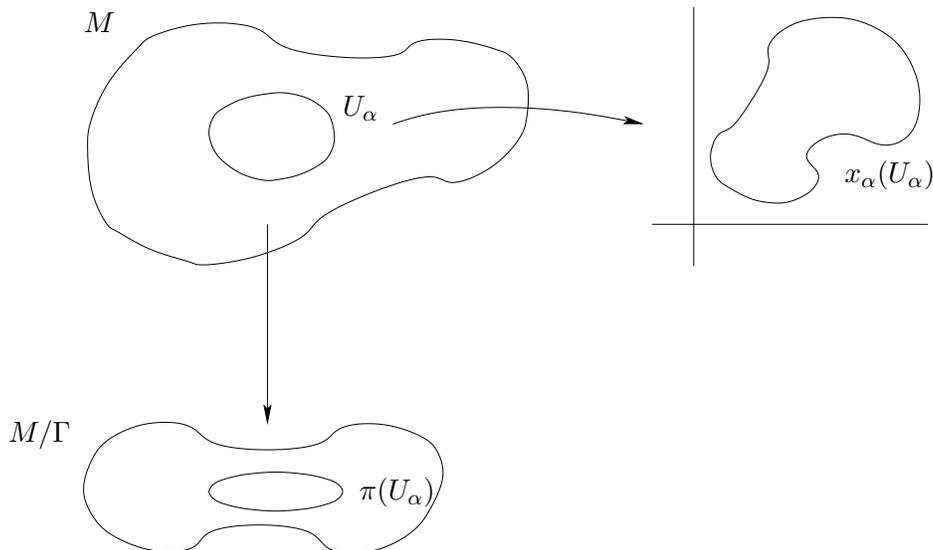


Abbildung 2.8:

$$\mathcal{A}_M = \{(x_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in I\}$$

mit  $\gamma U_\alpha \cap U_\alpha = \emptyset$  für alle  $\gamma \in \Gamma \setminus \{\text{id}\}$ . Dieser Atlas existiert, denn zu jedem  $p \in M$  existiert wegen des obigen Lemmas eine offene Umgebung  $U$  mit  $p \in U$  und  $\gamma U \cap U = \emptyset$  für alle  $\gamma \in \Gamma \setminus \{\text{id}\}$ . Schränke die Karten eines vorgegebenen Atlanten auf solche offenen Umgebungen ein. Dann definiert

$$\mathcal{A}_{M/\Gamma} = \{(x_\alpha \circ (\pi|_{U_\alpha})^{-1}, \pi(U_\alpha)) \mid \alpha \in I\}$$

einen Atlas für  $M/\Gamma$  (siehe Abbildung 2.8). Die Kartenwechsel sind von der Form

$$x_\beta \circ (\pi|_{U_\beta})^{-1} \circ \pi|_{U_\alpha} \circ x_\alpha^{-1} = x_\beta \circ (\pi|_{U_\beta})^{-1} \circ \pi \circ x_\alpha^{-1}.$$

Ist

$$\pi(U_\alpha) \cap \pi(U_\beta) \neq \emptyset,$$

so existiert für jedes

$$p \in V := (\pi|_{U_\alpha})^{-1}(\pi(U_\alpha) \cap \pi(U_\beta))$$

genau ein  $\gamma_p \in \Gamma$  mit  $(\pi|_{U_\beta})^{-1} \circ \pi(p) = \gamma_p(p) \in U_\beta$ . Betrachte die offene Umgebung  $V' \subset V$  von  $p$  mit

$$V' := \gamma_p^{-1}(U_\beta) \cap V,$$

dann ist  $\gamma_q = \gamma_p = \gamma$  für alle  $q \in V'$ , denn nach Definition von  $\gamma_q$  folgt  $\gamma_q(q) \in U_\beta$  und nach Definition von  $V'$  folgt  $\gamma_q(q) \in \gamma_q \gamma_p^{-1} U_\beta$  und somit

$$\gamma_q(q) \in \gamma_q \gamma_p^{-1} U_\beta \cap U_\beta.$$

Damit ist  $\gamma_q \gamma_p^{-1} = \text{id}$  und es gilt in der offenen Umgebung  $x_\alpha(V')$  von  $x_\alpha(p)$  die Beziehung

$$x_\beta \circ \pi|_{U_\beta}^{-1} \circ \pi \circ x_\alpha^{-1} = x_\beta \circ \gamma \circ x_\alpha^{-1}.$$

Da die Kartenwechsel von  $M$  differenzierbar sind und  $\Gamma$  als Gruppe von Diffeomorphismen auf  $M$  operiert, sind daher auch die Kartenwechsel des Atlanten  $\mathcal{A}_{M/\Gamma}$  differenzierbar.  $\square$

**Beispiele.** (a) Betrachte auf  $S^n$  die Operation der Gruppe  $\Gamma = \mathbb{Z}_2 = (\{1, -1\}, \cdot)$  definiert durch

$$1(x) = x \quad \text{und} \quad (-1)(x) = -x.$$

Diese Gruppenoperation ist offensichtlich eigentlich und fixpunktfrei, und es gilt

$$S^n/\Gamma = \mathbb{R}P^n.$$

(b) Sei  $M = \mathbb{R}^n$  und  $\Gamma = (\mathbb{Z}^n, +)$ . Für alle  $a \in \Gamma$  definiert  $a(x) = a+x$  eine Gruppenoperation von  $\mathbb{Z}^n$  auf  $\mathbb{R}^n$ , die eigentlich und fixpunktfrei ist. Dann ist

$$\mathbb{R}^n/\Gamma = T^n,$$

wobei  $T^n$  den n-dimensionalen Torus bezeichnet.

(c) Sei  $\mathbb{H}^2 = \{x + iy \mid x \in \mathbb{R}, y > 0\}$  und

$$SL(2, \mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{Z}) \mid ad - bc = 1 \right\}.$$

Dann operiert  $SL(2, \mathbb{Z})$  auf  $\mathbb{H}^2$  durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Diese Operation ist jedoch nicht fixpunktfrei, und der Quotient ist keine Mannigfaltigkeit.

**Satz 2.2.8.** Sei  $(M, \tilde{g})$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $\Gamma$  eine diskrete Gruppe, die eigentlich, fixpunktfrei und isometrisch auf  $M$  operiert. Dann existiert auf  $M/\Gamma$  genau eine Riemannsche Metrik  $g$ , so dass  $\pi : M \rightarrow M/\Gamma$  eine lokale Isometrie ist.

*Beweis.* Damit die Projektion  $\pi : M \rightarrow M/\Gamma$  eine lokale Isometrie ist, muss das Differential  $D\pi(q) : T_q M \rightarrow T_{\pi(q)}(M/\Gamma)$  für alle  $q \in M$  eine lineare Isometrie sein. Diese Forderung definiert für jedes  $q \in M$  ein Skalarprodukt  $g_{\pi(q)}$  auf  $T_{\pi(q)}(M/\Gamma)$ . Es ist auch wohldefiniert, denn seien  $q_1, q_2 \in M$  mit  $\pi(q_1) = \pi(q_2) = p$ , so existiert ein  $\gamma \in \Gamma$  mit  $\gamma(q_1) = q_2$ . Da  $\pi \circ \gamma = \pi$ , kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (T_{q_1} M, \tilde{g}_{q_1}) & \xrightarrow{D\gamma(q_1)} & (T_{q_2} M, \tilde{g}_{q_2}) \\ & \searrow D\pi(q_1) & \swarrow D\pi(q_2) \\ & & T_p(M/\Gamma) \end{array}$$

Nun ist  $D\gamma(q_1)$  eine lineare Isometrie, und somit ist das Skalarprodukt auf  $T_p(M/\Gamma)$  eindeutig bestimmt. Die so definierten Skalarprodukte bestimmen daher genau eine Riemannsche Metrik auf  $M/\Gamma$ .  $\square$

Wie wir nun sehen werden, gelten analoge Aussagen auch für Operationen von Liegruppen.

**Definition 2.2.9.** Seien  $(M, g)$ ,  $(N, h)$  Riemannsche Mannigfaltigkeiten und  $\pi : M \rightarrow N$  eine Submersion. Dann heißt für  $x \in M$  der Untervektorraum

$$\ker D\pi(x) =: V_x$$

von  $T_x M$  der *Vertikalraum* im Punkte  $x$ . Das bezüglich  $g$  orthogonale Komplement  $H_x$  von  $V_x$  in  $T_x M$  heißt *Horizontalraum*. Die Submersion  $\pi : M \rightarrow N$  heißt *Riemannsch*, falls für alle  $x \in M$  der lineare Isomorphismus

$$D\pi(x) : (H_x, g_x) \rightarrow (T_{\pi(x)} N, h_{\pi(x)})$$

eine Isometrie ist.

**Beispiel.** Ist  $M = M_1 \times M_2$  das Produkt zweier Riemannscher Mannigfaltigkeiten  $(M_1, g_1)$  sowie  $(M_2, g_2)$ , und trägt  $M$  die Produktmetrik  $g_1 \times g_2$ , so sind die Projektionen  $\pi_1 : M \rightarrow M_1$  und  $\pi_2 : M \rightarrow M_2$  Riemannsche Submersionen.

**Satz 2.2.10.** Sei  $G$  eine Liegruppe, die eigentlich und fixpunktfrei auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  operiert. Dann existiert auf  $M/G$  genau eine differenzierbare Struktur, so dass

$$\pi : M \rightarrow M/G$$

eine Submersion ist. Ist darüber hinaus  $g$  eine Riemannsche Metrik auf  $M$ , so dass  $G$  isometrisch auf  $M$  operiert, so existiert genau eine Riemannsche Metrik  $h$  auf  $M/G$ , so dass

$$\pi : (M, g) \rightarrow (M/G, h)$$

eine Riemannsche Submersion ist.

Für die Konstruktion der Karten auf  $M/G$  ist das sogenannte Slicelemma von entscheidender Bedeutung, was wir ohne Beweis notieren.

**Lemma 2.2.11.** (*Slice-Lemma*)

Es sei  $G$  eine Liegruppe, die eigentlich und fixpunktfrei auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $M$  operiert. Dann gibt es zu jedem  $p \in M$  eine Untermannigfaltigkeit  $S \subset M$  mit  $p \in S$  (genannt slice oder Scheibe), so dass gilt:

1.  $U := GS = \{ax \mid a \in G, x \in S\}$  ist offen in  $M$ .
2. Die Abbildung  $\psi : G \times S \rightarrow U$  mit  $\psi(a, x) = ax$  ist ein Diffeomorphismus.

Mittels des Slice-Lemmas folgt der Beweis von Satz 2.2.10 wie folgt:

*Beweis.* Für jedes  $p \in M$  wähle einen slice  $S_p$  mit  $p \in S_p$ , so dass eine Karte  $(x_p, V_p)$  aus dem maximalen Atlas von  $M$  mit folgenden Eigenschaften existiert:

- $S_p \subset V_p$
- $(x_p, S_p)$  ist eine Karte für  $S_p$ .

Sei  $\pi : M \rightarrow M/G$  die kanonische Projektion, so ist wegen des Slice-Lemmas die Abbildung  $\varphi_p := \pi|_{S_p} : S_p \rightarrow \pi(S_p)$  bijektiv, und da  $\pi : M \rightarrow M/G$  stetig ist, ist  $\varphi_p$  ebenfalls stetig. Außerdem ist  $\varphi_p(V) = \pi(V) = \pi(GV)$  offen für alle offenen Teilmengen  $V$  in  $S_p$ , denn  $GV$  ist wegen Eigenschaft 2 aus Lemma 2.2.11 offen und die Projektion  $\pi : M \rightarrow M/G$  ist eine offene Abbildung. Also ist  $\varphi_p$  ein Homöomorphismus. Wegen des Slice-Lemmas ist die Abbildung

$$\psi_p : G \times S_p \rightarrow U_p := GS_p$$

ein Diffeomorphismus, und da  $\varphi_p(x) = \pi(\psi_p(a, x))$  für alle  $a \in G$ , ist  $\varphi_p(S_p) = \pi(U_p)$ . Die Menge

$$\mathcal{A}_{M/G} := \{(x_p \circ \varphi_p^{-1}, \pi(U_p))\}$$

definiert einen Atlas für  $M/G$ , denn ist  $\pi(U_p) \cap \pi(U_q) \neq \emptyset$ , so gilt für alle  $x \in \varphi_p^{-1}(\pi(U_p) \cap \pi(U_q))$

$$\varphi_q^{-1} \circ \varphi_p(x) = (\psi_q^{-1}(x))_2.$$

Insbesondere ist  $\varphi_q^{-1} \circ \varphi_p : \varphi_p^{-1}(\pi(U_p) \cap \pi(U_q)) \rightarrow \varphi_q^{-1}(\pi(U_p) \cap \pi(U_q))$  differenzierbar. Damit sind aber auch die Kartenwechsel auf  $M/G$  differenzierbar.

Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, auf der  $G$  auch isometrisch operiert. Für  $x \in M$  sei mit  $H_x$  der Horizontalraum der Submersion  $\pi : M \rightarrow M/G$  bezeichnet. Dann existiert genau eine Riemannsche Metrik  $h$  auf  $M/G$ , so dass  $\pi : (M, g) \rightarrow (M/G, h)$  eine Riemannsche Submersion ist, nämlich d.h.

$$D\pi(x) : (H_x, g_x) \rightarrow (T_{\pi(x)}(M/G), h_{\pi(x)})$$

ist eine lineare Isometrie für alle  $x \in M$ . Auf der einen Seite ist durch diese Forderung an  $D\pi(x)$  das Skalarprodukt  $h_{\pi(x)}$  eindeutig bestimmt. Auf der anderen Seite ist  $h_{\pi(x)}$  dadurch auch wohldefiniert, denn ist  $\pi(x) = \pi(y)$ , so existiert ein  $a \in G$  mit  $ax = y$ . Da  $G$  auf  $M$  isometrisch operiert, ist insbesondere  $\phi_a : M \rightarrow M$  mit  $\phi_a(x) = ax$  eine Isometrie. Ihr

Differential bildet Horizontalräume auf Horizontalräume ab. Da  $\pi \circ \phi_a = \pi$ , kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (H_x, g_x) & \xrightarrow{D\phi_a(x)} & (H_{ax}, g_{ax}) \\ & \searrow D\pi(x) & \swarrow D\pi(ax) \\ & & (T_{\pi(x)}(M/G), h_{\pi(x)}) \end{array}$$

und somit ist  $h_{\pi(x)}$  wohldefiniert, denn ist  $D\pi(x)$  eine Isometrie, so auch  $D\pi(ax)$ .  $\square$

**Beispiel.** Betrachte die Einheitskugel

$$S^{2n+1} := \{(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} |z_i|^2 = 1\}$$

mit der durch  $\mathbb{R}^{2n+2} \cong \mathbb{C}^{n+1}$  induzierten Metrik  $g$ . Dann operiert die Liegruppe

$$S^1 = \{a \in \mathbb{C} \mid |a| = 1\}$$

mit der multiplikativen Gruppenstruktur von  $\mathbb{C}^*$  durch

$$a(z_1, \dots, z_{n+1}) := (az_1, \dots, az_{n+1})$$

eigentlich, frei und isometrisch auf  $S^{2n+1}$ . Der Quotient  $S^{2n+1}/S^1$  ist diffeomorph zum komplex projektiven Raum  $\mathbb{C}P^n$ . Also existiert genau eine Riemannsche Metrik  $h$  auf  $\mathbb{C}P^n$ , sodass die Projektion

$$\pi : (S^{2n+1}, g) \rightarrow (S^{2n+1}/S^1, h)$$

eine Riemannsche Submersion ist. Die Metrik  $h$  heißt Fubini-Study Metrik.

Weitere Beispiele erhält man wie folgt.

### Homogene Räume.

Sei  $G$  eine Liegruppe. Eine Lieuntergruppe von  $G$  ist eine Untergruppe, die gleichzeitig eine Untermannigfaltigkeit von  $G$  ist. Man kann zeigen, dass jede abgeschlossene Untergruppe einer Liegruppe auch eine Lieuntergruppe ist. Ist  $H \subset G$  eine Lieuntergruppe, so operiert  $H$  durch Linksmultiplikation, aber auch durch Rechtsmultiplikation, frei auf  $G$ . Es ist üblich, in diesem Falle die Rechtsmultiplikation zu betrachten. Will man allerdings eine Gruppenoperation im Sinne von Definition 2.2.1 erhalten, so muss man von rechts mit den inversen Elementen von  $H$  multiplizieren, d.h. die Operation  $\phi : H \times G \rightarrow G$  mit

$$\phi(b, a) = \phi_b(a) := ab^{-1}$$

betrachten. Offensichtlich gilt  $\phi_{b_1 b_2} = \phi_{b_1} \phi_{b_2}$ , d.h.  $H$  operiert auf  $G$ . Würden wir hingegen die Operation durch  $\phi_b(a) := ab$  erklären, so wäre  $\phi_{b_1 b_2}(a) = \phi_{b_2} \phi_{b_1}(a)$ . Dies nennt man manchmal auch eine Antigruppenoperation. Wegen  $gh = g \Rightarrow h = 1$  operiert  $H$  fixpunktfrei auf  $G$ . Ist nun  $H$  zusätzlich eine abgeschlossene Untergruppe von  $G$ , so kann man zeigen, dass  $H$  auch eigentlich auf  $G$  operiert. Dazu betrachte eine kompakte Teilmenge  $K$  von  $G$  und betrachte die Menge

$$H_K = \{b \in H \mid Kb^{-1} \cap K \neq \emptyset\}.$$

Dann hat jede Folge  $b_n \in H_K$  eine konvergente Teilfolge, denn zu  $b_n \in H_K$  existiert ein  $a_n \in K$  mit  $a_n b_n^{-1} \in K$ . Da  $K$  kompakt ist, existieren konvergente Teilfolgen  $a_{n_j} \rightarrow a \in K$  und  $a_{n_j} b_{n_j}^{-1} \rightarrow c \in K$ . Also konvergiert auch die Folge  $b_{n_j}$  gegen  $a^{-1}c$ , und da  $H$  abgeschlossen ist, liegt der Grenzwert in  $H$ .

Wie bei den Gruppenoperationen auf allgemeinen Mannigfaltigkeiten erhalten wir daher genau eine differenzierbare Struktur auf  $G/H$ , so dass

$$\pi : G \rightarrow G/H$$

zu einer Submersion wird. Der Raum  $G/H$  heißt homogener Raum. Die Äquivalenzklassen  $[a]$  in  $G/H$  sind von der Form

$$[a] = \{ab^{-1} \mid b \in H\} =: aH$$

Man erhält homogene Räume auch wie folgt.

**Satz 2.2.12.** *Sei  $G$  eine Liegruppe, die transitiv auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  operiert. Dann ist für jedes  $x \in M$  die Isotropiegruppe  $G_x$  abgeschlossen, und die Mannigfaltigkeit  $M$  ist diffeomorph zu  $G/G_x$ .*

*Beweis.* Betrachte die Abbildung  $F : G/G_x \rightarrow M$  mit  $F([a]) = ax$ . Dann ist  $F$  wohldefiniert, denn sind  $a_1, a_2 \in G$  mit  $a_1 \sim a_2$ , so existiert ein  $b \in G_x$  mit  $a_1 = a_2 b^{-1}$ . Daher gilt:  $a_1 x = a_2 b^{-1} x = a_2 x$ . Da  $G$  transitiv auf  $M$  operiert, ist  $F$  surjektiv. Außerdem ist  $F$  injektiv, denn ist  $a_1 x = a_2 x$ , so folgt  $a_1^{-1} a_2 x = x$ , d.h.  $a_1^{-1} a_2 \in G_x$  und somit ist  $[a_1] = [a_2]$ . Die Differenzierbarkeit von  $F$  und  $F^{-1}$  sei als Übung überlassen.  $\square$

**Übung.** Man zeige: Die Gruppe  $SO(n+1)$  operiert transitiv auf der Sphäre  $S^n$ , und die Gruppe  $O(n,1)$  operiert transitiv auf dem hyperbolischen Raum  $H^n$ . Daher sind die Sphäre und der hyperbolische Raum Beispiele für homogene Räume. (Wie sehen die Isotropiegruppen aus?). Ist  $CP^n$  ebenfalls ein homogener Raum?

## 2.3 Riemannsche Mannigfaltigkeiten als metrische Räume

Jeder Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  lässt sich ein metrischer Raum  $(M, d)$  zuordnen. Dazu benötigt man den Begriff der Länge einer Kurve.

**Definition 2.3.1.** Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  eine differenzierbare Kurve. Dann heißen

$$(i) \quad L(\alpha) := \int_a^b g(\dot{\alpha}(t), \dot{\alpha}(t))^{1/2} dt \text{ die Länge von } \alpha.$$

$$(ii) \quad E(\alpha) := \frac{1}{2} \int_a^b g(\dot{\alpha}(t), \dot{\alpha}(t)) dt \text{ die Energie von } \alpha.$$

**Bemerkungen.** (1) Wir nennen eine Kurve auf einem abgeschlossenen Intervall *differenzierbar*, falls sie eine differenzierbare Fortsetzung auf ein offenes Intervall besitzt.

(2)  $L(\alpha)$  hängt nicht von der Parametrisierung der Kurve ab.  $E(\alpha)$  hingegen ist abhängig von der Parametrisierung der Kurve.

- (3) a) Die Länge kann man wie folgt in lokalen Koordinaten berechnen: ist  $(x, U)$  eine Karte und  $\alpha : [a, b] \rightarrow U$  eine differenzierbare Kurve mit

$$x \circ \alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))$$

so gilt:

$$\dot{\alpha}(t) = \sum_{i=1}^n \dot{\alpha}_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\alpha(t)}$$

und

$$\begin{aligned} g(\dot{\alpha}(t), \dot{\alpha}(t)) &= \sum_{i,j=1}^n \dot{\alpha}_i(t) \dot{\alpha}_j(t) g\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\alpha(t)}, \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_{\alpha(t)}\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \dot{\alpha}_i(t) \dot{\alpha}_j(t) g_{ij}(\alpha(t)). \end{aligned}$$

Somit ist

$$L(\alpha) = \int_a^b \left( \sum_{i,j=1}^n \dot{\alpha}_i(t) \dot{\alpha}_j(t) g_{ij}(\alpha(t)) \right)^{1/2} dt.$$

- b) Ist  $K \subset U$  eine kompakte Menge, so existieren für alle Kurven  $\alpha : [a, b] \rightarrow K$  Konstanten  $0 < \mu \leq \lambda$  mit

$$\mu L_{\mathbb{R}^n}(x \circ \alpha) \leq L(\alpha) \leq \lambda L_{\mathbb{R}^n}(x \circ \alpha),$$

wobei  $L_{\mathbb{R}^n}$  die Längenmessung bezüglich des Standardskalarproduktes auf dem  $\mathbb{R}^n$  bezeichnet. Denn da  $(g_{ij})$  positiv definit ist, folgt aus der Stetigkeit der  $g_{ij}$  die Existenz von Konstanten  $0 < \mu \leq \lambda$  mit

$$\mu^2 \sum_{i=1}^n v_i^2 \leq \sum_{i,j} g_{ij}(q) v_i v_j \leq \lambda^2 \sum_{i=1}^n v_i^2$$

für alle  $v \in \mathbb{R}^n$  und  $q \in K$ . Dies impliziert die obige Abschätzung.

- (4) Ist  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  stetig, so heißt  $\alpha$  stückweise differenzierbar, falls eine Unterteilung  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_l = b$  existiert, so dass  $\alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}$  differenzierbar ist. Die Länge von  $\alpha$

ist dann durch  $L(\alpha) = \sum_{i=1}^l \int_{t_{i-1}}^{t_i} g(\dot{\alpha}(t), \dot{\alpha}(t))^{1/2} dt$  definiert.

- (5) Zu (3) und (4) entsprechende Aussagen gelten auch für die Energie.

Um einen Abstandsbegriff auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten erklären zu können, müssen sich je zwei Punkte durch eine stückweise differenzierbare Kurve verbinden lassen. Dazu benötigt man zusammenhängende Mannigfaltigkeiten.

**Definition 2.3.2.** Eine Mannigfaltigkeit  $M$  heißt *zusammenhängend*, falls Folgendes gilt: Ist  $U \subset M$  offen und abgeschlossen (d.h.  $M \setminus U$  offen), so ist  $U = \emptyset$  oder  $U = M$ .

Mit anderen Worten:  $M$  ist genau dann zusammenhängend, wenn  $M$  sich nicht als disjunkte Vereinigung zweier nicht leerer offener Mengen schreiben lässt.

**Lemma 2.3.3.** *Ist  $M$  zusammenhängend, so existiert zu  $p, q \in M$  eine stückweise differenzierbare Kurve, die  $p$  und  $q$  verbindet.*

**Bemerkung.** Man kann leicht zeigen, dass sogar eine differenzierbare Verbindungskurve existiert. Die Umkehrung von Lemma 2.3.3 gilt ebenfalls.

*Beweis.* Für jedes  $p \in M$  betrachte die Menge

$$E_p = \{q \in M \mid \exists \alpha : [0, a] \rightarrow M \text{ stückweise differenzierbar mit } \alpha(0) = p, \alpha(a) = q\}.$$

$E_p$  ist offen, denn ist  $q \in E_p$ , so wähle eine Karte  $(x, U)$  mit  $q \in U$  und  $x(U) \subset \mathbb{R}^n$  zusammenhängend. Dann lässt sich jeder Punkt  $q' \in U$  differenzierbar mit  $q$  verbinden. Also ist die offene Menge  $U$  in  $E_p$  enthalten. Des Weiteren ist  $M \setminus E_p$  offen, denn ist  $q \in M \setminus E_p$ , so existiert wieder eine offene zusammenhängende Umgebung  $U$  von  $q$ , so dass jeder Punkt  $q' \in U$  sich mit  $q$  differenzierbar verbinden lässt. Wäre  $q' \in E_p$  so wäre auch  $q \in E_p$  im Widerspruch zu  $q \in M \setminus E_p$ . Also folgt  $U \cap E_p = \emptyset$  und somit  $U \subset M \setminus E_p$ . Also ist  $E_p \neq \emptyset$  sowohl offen als auch abgeschlossen, und wir erhalten  $E_p = M$ .  $\square$

**Definition 2.3.4.** Sei  $(M, g)$  eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, so heißt für  $p, q \in M$

$$d(p, q) = \inf\{L(\alpha) \mid \alpha : [a, b] \rightarrow M \text{ stückweise differenzierbar mit } \alpha(a) = p, \alpha(b) = q\}$$

der durch  $g$  induzierte Abstand zwischen  $p$  und  $q$ .

**Satz 2.3.5.** *Sei  $(M, g)$  eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann ist  $(M, d)$  ein metrischer Raum, d.h. für alle  $p, q, r \in M$  gilt:*

$$(i) \quad d(p, q) \geq 0 \text{ und } d(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$$

$$(ii) \quad d(p, q) = d(q, p)$$

$$(iii) \quad d(p, q) \leq d(p, r) + d(q, r)$$

*Beweis.* (i) Zunächst ist  $d(p, q) \geq 0$ , da  $L(\alpha) \geq 0$  für alle Kurven  $\alpha$ , die  $p$  und  $q$  verbinden. Ist  $p = q$ , so folgt  $d(p, q) = 0$ , denn  $L(\alpha) = 0$ , falls  $\alpha$  die konstante Verbindungskurve ist. Wir zeigen: Ist  $p \neq q$ , so folgt  $d(p, q) > 0$ .

Da die Topologie auf  $M$  Hausdorffsch ist, existiert eine offene Umgebungen  $\tilde{U}$  von  $p$  mit  $q \notin \tilde{U}$ . Sei  $(x, U)$  eine Karte mit  $p \in U \subset \tilde{U}$ . Wähle  $\epsilon > 0$  mit

$$\bar{B}(x(p), \epsilon) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x(p)\| \leq \epsilon\} \subset x(U),$$

wobei  $\|\cdot\|$  die Standardnorm des  $\mathbb{R}^n$  bezeichnet. Sei  $\alpha : [0, a] \rightarrow M$  eine Kurve mit  $\alpha(0) = p, \alpha(a) = q$ . Dann existiert ein  $t_0$  mit  $\|x \circ \alpha(t) - x(p)\| \leq \epsilon$  für  $t \in [0, t_0]$  und  $\|x \circ \alpha(t_0) - x(p)\| = \epsilon$ . Wegen obiger Bemerkung existiert daher eine Konstante  $\mu > 0$  mit

$$L(\alpha) = L(\alpha|_{[0, t_0]}) + L(\alpha|_{[t_0, a]}) \geq L(\alpha|_{[0, t_0]}) \geq \mu L(x \circ \alpha|_{[0, t_0]}) \geq \mu\epsilon.$$

Also folgt:  $d(p, q) \geq \mu\epsilon > 0$ .

(ii) ist trivial.

- (iii) Sei  $\epsilon > 0$  und  $\alpha_{p,r} : [0, a] \rightarrow M$ ,  $\alpha_{r,q} : [a, b] \rightarrow M$  stückweise differenzierbare Kurven mit  $\alpha_{p,r}(0) = p$  und  $\alpha_{p,r}(a) = r$  und  $\alpha_{r,q}(a) = r$  und  $\alpha_{r,q}(b) = q$  sowie  $L(\alpha_{p,r}) \leq d(p, r) + \epsilon$ ,  $L(\alpha_{r,q}) \leq d(r, q) + \epsilon$ . Dann ist

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha_{p,r}(t) & \text{für } t \in [0, a] \\ \alpha_{r,q}(t) & \text{für } t \in [a, b] \end{cases}$$

eine stückweise differenzierbare Kurve, die  $p$  mit  $q$  verbindet.

Es gilt:

$$d(p, q) \leq L(\alpha) = L(\alpha_{p,r}) + L(\alpha_{r,q}) \leq d(p, r) + d(r, q) + 2\epsilon.$$

Da  $\epsilon > 0$  beliebig war, folgt die Behauptung. □

**Übung.** Seien  $B_d(p, \epsilon) = B(p, \epsilon) = \{q \in M \mid d(p, q) < \epsilon\}$  die offenen Bälle bezüglich  $d$ . Zeigen Sie: Die durch das Mengensystem  $\{B(p, \epsilon) \mid p \in M, \epsilon > 0\}$  erzeugte Topologie stimmt mit der auf  $M$  gegebenen Topologie überein.

Folgern Sie: Die Abbildung  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst:

- Ist  $U$  eine offene Umgebung von  $p$  in  $M$ , so existiert ein  $\epsilon > 0$  mit  $B(p, \epsilon) \subset U$ .
- Zu  $B(p, \epsilon)$  existiert eine offene Umgebung  $V$  von  $p$  mit  $V \subset B(p, \epsilon)$ .

## 2.4 Kovariante Ableitung

Wir kommen nun zu einem weiteren fundamentalen Begriff in der Riemannschen Geometrie, nämlich dem der kovarianten Ableitung. Bei der kovarianten Ableitung geht es darum, die Änderung eines Vektorfeldes in Richtung eines Vektors zu messen. Dazu muss man die Vektoren eines Vektorfeldes  $Y : M \rightarrow TM$  an verschiedenen Fußpunkten vergleichen (siehe Abbildung 2.9). Auf dem  $\mathbb{R}^n$  lässt sich dieses Problem mit Hilfe der Parallelverschiebung

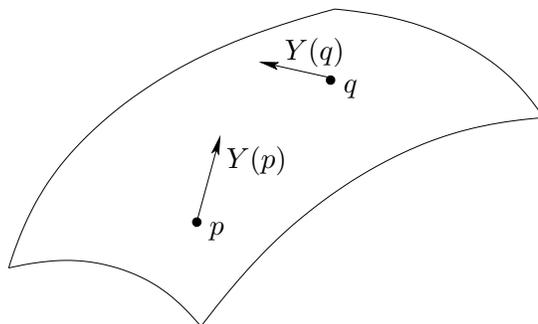


Abbildung 2.9:

lösen.

Ist  $Y : \mathbb{R}^n \rightarrow T\mathbb{R}^n$  so ist  $Y(p) \in T_p\mathbb{R}^n \cong T_0\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ , wobei wir den  $T_p\mathbb{R}^n$  mittels Parallelverschiebung mit  $T_0\mathbb{R}^n$  identifizieren (siehe Abbildung 2.10). Also lässt sich  $Y$  als Abbildung

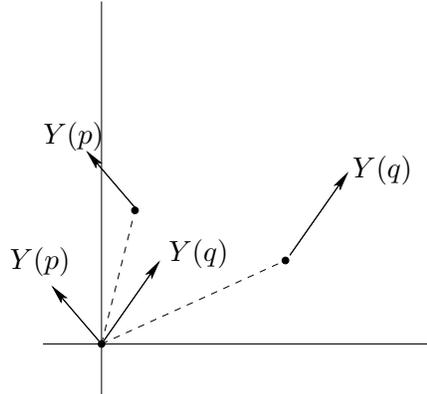


Abbildung 2.10:

$Y : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  auffassen. Die infinitesimale Änderung von  $Y$  in Richtung  $v \in \mathbb{R}^n$  im Punkte  $p \in \mathbb{R}^n$  ist durch

$$\nabla_v Y(p) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y(p + tv) - Y(p)}{t}$$

gegeben. Insbesondere ist  $\nabla_v Y(p) = DY(p)v$ . Betrachten wir ein weiteres Vektorfeld  $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , so kann man  $(\nabla_X Y)(p) = \nabla_{X(p)} Y(p) = DY(p)X(p)$  wieder als Vektorfeld auffassen. Damit wird  $\nabla : \Gamma(T\mathbb{R}^n) \times \Gamma(T\mathbb{R}^n) \rightarrow \Gamma(T\mathbb{R}^n)$  zu einer  $\mathbb{R}$ -bilinearen Abbildung. Außerdem gilt

$$\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y \quad \text{und} \quad \nabla_X (fY) = (Xf) \cdot Y + f \nabla_X Y$$

für alle  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  sowie  $X, Y \in \Gamma(T\mathbb{R}^n)$ . Desweiteren lässt sich die Lieklammer durch

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

ausdrücken. Wir wollen nun diese Begriffsbildung auf Mannigfaltigkeiten verallgemeinern.

**Definition 2.4.1.** Eine *kovariante Ableitung (Zusammenhang)* auf dem Tangentialbündel  $TM$  einer Mannigfaltigkeit  $M$  ist eine  $\mathbb{R}$ -bilineare Abbildung

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$$

$$(X, Y) \mapsto \nabla_X Y,$$

so dass für alle  $f \in C^\infty(M), X, Y \in \Gamma(TM)$  gilt:

- (a)  $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$
- (b)  $\nabla_X (fY) = (Xf) \cdot Y + f \nabla_X Y$

**Bemerkungen.** (i) Die Eigenschaft (a) besagt, dass  $\nabla$  im ersten Argument  $C^\infty(M)$ -linear ist.

(ii) Die Abbildung

$$T : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$$

$$(X, Y) \mapsto \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

ist  $C^\infty(M)$ -bilinear und antisymmetrisch. Sie heißt die *Torsion* des Zusammenhangs.

Ein Zusammenhang heißt *torsionsfrei* (*symmetrisch*), falls  $T = 0$ . Der oben definierte Zusammenhang auf  $TR^n$  ist torsionsfrei.

Die kovariante Ableitung hängt nur vom Verhalten der Vektorfelder in einer kleinen Umgebung ab.

**Lemma 2.4.2.** *Die kovariante Ableitung ist ein lokaler Operator, d.h. ist  $p \in M$  und  $U$  offene Umgebung von  $p$ , so gilt für alle  $X, Y, \tilde{X}, \tilde{Y} \in \Gamma(TM)$*

$$(\nabla_X Y)(p) = (\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y})(p)$$

falls

$$X|_U = \tilde{X}|_U \text{ und } Y|_U = \tilde{Y}|_U.$$

*Beweis.* Wähle  $\varphi \in C^\infty(M)$  mit  $\varphi(q) \leq 1$  für alle  $q \in M$ ,  $\varphi(p) = 1$  und  $\varphi(q) = 0$  für  $q \in M \setminus U$ . Dann gilt:  $\varphi X = \varphi \tilde{X}$  und  $\varphi Y = \varphi \tilde{Y}$ , sowie  $Z(\varphi)(p) = 0$  für alle  $Z \in \Gamma(TM)$ , weil  $\varphi$  in  $p$  maximal wird. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} (\nabla_X Y)(p) &= \varphi(p)(\nabla_X Y)(p) \stackrel{a)}{=} \nabla_{\varphi X} Y(p) = \nabla_{\varphi \tilde{X}} Y(p) \\ &\stackrel{a)}{=} \varphi(p) \nabla_{\tilde{X}} Y(p) = \varphi(p) \nabla_{\tilde{X}} Y(p) + \tilde{X}(p)(\varphi) Y(p) \\ &\stackrel{b)}{=} (\nabla_{\tilde{X}}(\varphi Y))(p) = \nabla_{\tilde{X}}(\varphi \tilde{Y})(p) \\ &\stackrel{b)}{=} (\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y})(p) \end{aligned}$$

□

Tensoren sind Operatoren, die nicht nur  $\mathbb{R}$ -linear, sondern sogar  $C^\infty(M)$ -linear sind. Wir werden sehen, dass Tensorfelder nur von den Werten der Vektorfelder in einem Punkt abhängen. Wir werden uns auf spezielle Tensorfelder beschränken.

**Definition 2.4.3.** Unter einem *Tensorfeld* (*Tensor*) der Stufe (vom Typ)  $(0, s)$  bzw.  $(1, s)$  verstehen wir eine  $s$ -fach  $C^\infty(M)$ -lineare Abbildung

$$B : \underbrace{\Gamma(TM) \times \dots \times \Gamma(TM)}_{s\text{-mal}} \rightarrow C^\infty(M)$$

bzw.

$$B : \underbrace{\Gamma(TM) \times \dots \times \Gamma(TM)}_{s\text{-mal}} \rightarrow \Gamma(TM).$$

Dabei heißt  $B : \Gamma(TM) \times \dots \times \Gamma(TM) \rightarrow C^\infty(M)$  ( $\rightarrow \Gamma(TM)$ ) genau dann  $C^\infty(M)$ -linear, falls

$$B(\dots, fX + gY, \dots) = fB(\dots, X, \dots) + gB(\dots, Y, \dots)$$

für alle  $f, g \in C^\infty(M)$  und  $X, Y \in \Gamma(TM)$  gilt.

Ein Tensor der Stufe  $(r, s)$  heißt auch  $r$ -fach *kontravariant* und  $s$ -fach *kovariant*.

**Beispiele.** • Eine Riemannsche Metrik  $g(X, Y)(p) = g_p(X(p), Y(p))$  ist ein  $(0, 2)$ -Tensor.

• Sei  $Y \in \Gamma(TM)$ . Dann ist  $\nabla Y : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$  mit  $X \mapsto \nabla_X Y$  ein  $(1, 1)$ -Tensor.

- Die Torsion  $T : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$  mit

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

ist ein  $(1, 2)$ -Tensor. Hingegen ist das Liesche Klammerprodukt  $[\cdot, \cdot] : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$  kein Tensor, sondern nur ein lokaler Operator.

- Die Abbildung  $R : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$  mit

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

ist ein  $(1, 3)$ -Tensor. Er heißt *Krümmungstensor*. Wir werden uns später intensiv mit diesem Tensor beschäftigen.

**Satz 2.4.4.** (*Charakterisierung von Tensorfeldern*)

- (i) Sei  $B$  ein  $(r, s)$ -Tensorfeld,  $r \in \{0, 1\}$ . Seien  $X_1, \dots, X_s \in \Gamma(TM)$  und  $p \in M$ . Dann hängt  $B(X_1, \dots, X_s)(p)$  nur von den Werten von  $X_1, \dots, X_s$  im Punkte  $p$  ab. Damit definiert  $B$  für jedes  $p \in M$  eine  $s$ -fach  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung

$$B_p : T_p M \times \dots \times T_p M \rightarrow \begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls } r = 0 \\ T_p M & \text{falls } r = 1. \end{cases}$$

- (ii) Ist  $(B_p)_{p \in M}$  eine Familie von  $s$ -fach  $\mathbb{R}$ -linearen Abbildungen

$$B_p : T_p M \times \dots \times T_p M \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{bzw. } T_p M)$$

und ist für alle  $X_1, \dots, X_s \in \Gamma(TM)$  die Abbildung

$$p \rightarrow B_p(X_1(p), \dots, X_s(p)) =: B(X_1, \dots, X_s)(p),$$

unendlich oft differenzierbar, so definiert  $B$  ein Tensorfeld der Stufe  $(0, s)$  bzw.  $(1, s)$ .

*Beweis.* (ii) ist klar. Zu (i):

- 1.Schritt:  $B$  ist ein lokaler Operator, denn ist  $U$  offene Umgebung von  $p$  und sind  $X_1, \dots, X_s$  und  $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_s$  Vektorfelder mit  $X_i|_U = \tilde{X}_i|_U$ , so wähle  $\varphi \in C^\infty(M)$  mit  $\varphi(p) = 1$  und  $\varphi|_{M \setminus U} = 0$ . Dann gilt  $\varphi X_i = \varphi \tilde{X}_i$  und

$$\begin{aligned} B(X_1, \dots, X_s)(p) &= \varphi^s(p) B(X_1, \dots, X_s)(p) = B(\varphi X_1, \dots, \varphi X_s)(p) \\ &= B(\varphi \tilde{X}_1, \dots, \varphi \tilde{X}_s)(p) = B(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_s)(p). \end{aligned}$$

- 2.Schritt: Seien nun  $(x, U)$  eine Karte mit  $p \in U$  und  $X_1, \dots, X_s$  und  $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_s$  Vektorfelder mit  $X_i(p) = \tilde{X}_i(p)$ . Betrachte für  $q \in U$

$$X_i(q) = \sum_{j=1}^n \beta_i^j(q) \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_q \quad \text{und} \quad \tilde{X}_i(q) = \sum_{j=1}^n \tilde{\beta}_i^j(q) \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_q.$$

Insbesondere ist  $\beta_i^j(p) = \tilde{\beta}_i^j(p)$ . Wegen Schritt 1 dürfen wir bei der Berechnung von  $B(X_1, \dots, X_s)(p)$  die Vektorfelder  $X_i$  durch ihre lokalen Darstellungen ersetzen. Also gilt:

$$\begin{aligned} B(X_1, \dots, X_s)(p) &= \sum_{j_1=1}^n \beta_1^{j_1}(p) B\left(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}, X_2, \dots, X_s\right)(p) \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_s=1}^n \beta_1^{j_1}(p) \cdot \dots \cdot \beta_s^{j_s}(p) B\left(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{j_s}}\right)(p) \\ &= B(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_s)(p) \end{aligned}$$

□

**Korollar 2.4.5.** *Ist  $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$  eine kovariante Ableitung, so hängt  $(\nabla_X Y)(p)$  nur von  $X(p) \in T_p M$  und  $Y$  in einer beliebigen offenen Umgebung von  $p$  ab.*

*Beweis.* Ist  $Y$  Vektorfeld, so ist  $\nabla Y : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$  mit  $X \rightarrow \nabla_X Y$  ein (1,1)-Tensor. Also hängt für gegebenes  $Y$  die kovariante Ableitung  $(\nabla_X Y)(p)$  nur von  $X(p) \in T_p M$ . Damit ist wegen Lemma 2.4.2 für gegebenes  $X(p) \in T_p M$  die kovariante Ableitung  $(\nabla_X Y)(p)$  nur von  $Y$  in einer beliebigen offenen Umgebung von  $p$  abhängig. □

Nun wollen wir die kovariante Ableitung in lokalen Koordinaten berechnen. Dazu benötigen wir die Christoffelsymbole.

**Definition 2.4.6.** (Christoffelsymbole)

Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit und  $(x, U)$  eine Karte und

$$\left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) (p) = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k(p) \frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_p.$$

Dann heißen die  $n^3$  Koeffizienten  $\Gamma_{ij}^k : U \rightarrow \mathbb{R}$  die *Christoffelsymbole* bezüglich  $(x, U)$ .

**Satz 2.4.7.** *Seien  $X, Y \in \Gamma(TM)$  Vektorfelder und  $(x, U)$  eine Karte von  $M$ . Sei  $X(p) = \sum_{i=1}^n \xi_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$  und  $Y(p) = \sum_{j=1}^n \eta_j(p) \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p$ . Dann gilt*

$$(\nabla_X Y)(p) = \sum_{k=1}^n \left( X(\eta_k)(p) + \sum_{i,j=1}^n \xi_i(p) \eta_j(p) \Gamma_{ij}^k(p) \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_p$$

für alle  $p \in U$ :

*Beweis.* Es gilt:

$$(\nabla_X Y)(p) = \sum_{i=1}^n \xi_i(p) \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} Y \right) (p)$$

Da

$$\begin{aligned}
\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} Y\right)(p) &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \left(\sum_{j=1}^n \eta_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)(p) = \sum_{j=1}^n \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \left(\eta_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)(p) \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p (\eta_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p + \eta_j(p) \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}\right)(p)\right) \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p (\eta_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p + \eta_j(p) \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_p\right) \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p (\eta_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \eta_j(p) \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_p \\
&= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p (\eta_k) + \sum_{j=1}^n \eta_j(p) \Gamma_{ij}^k\right) \frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_p
\end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}
(\nabla_X Y)(p) &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \xi_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p (\eta_k) + \sum_{i,j=1}^n \xi_i(p) \eta_j(p) \Gamma_{ij}^k\right) \frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_p \\
&= \sum_{k=1}^n \left(X(p)(\eta_k) + \sum_{i,j=1}^n \xi_i(p) \eta_j(p) \Gamma_{ij}^k(p)\right) \frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_p.
\end{aligned}$$

□

**Korollar 2.4.8.** Die kovariante Ableitung  $(\nabla_X Y)(p)$  hängt nur von  $X(p)$  und dem lokalen Verhalten von  $Y$  längs einer Kurve  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  mit  $\dot{\alpha}(0) = X(p)$  ab.

*Beweis.* Seien  $Y, \tilde{Y}$  zwei Vektorfelder und  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  Kurve mit  $\dot{\alpha}(0) = X(p)$  und  $Y \circ \alpha = \tilde{Y} \circ \alpha$ . Sei  $Y = \sum \eta_k \frac{\partial}{\partial x_k}$  und  $\tilde{Y} = \sum \tilde{\eta}_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ , so folgt:

$$X(p)(\eta_k) = \dot{\alpha}(0)(\eta_k) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \eta_k \circ \alpha = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \tilde{\eta}_k \circ \alpha = X(p)(\tilde{\eta}_k).$$

Damit erhalten wir:

$$(\nabla_X Y)(p) = (\nabla_X \tilde{Y})(p).$$

□

Dieses Korollar ermöglicht es, kovariante Ableitungen von Vektorfeldern längs Kurven zu definieren.

**Definition 2.4.9.** Sei  $\alpha : I \rightarrow M$  eine (differenzierbare) Kurve. Eine differenzierbare Abbildung  $V : I \rightarrow TM$  heißt *Vektorfeld längs*  $\alpha$ , falls  $\pi \circ V = \alpha$ , wobei  $\pi : TM \rightarrow M$  die kanonische Projektion bezeichnet. Mit  $\Gamma_\alpha(TM)$  bezeichnen wir den  $\mathbb{R}$ -Vektorraum aller differenzierbaren Vektorfelder längs  $\alpha$ .

**Bemerkung.** Ist  $(x, U)$  eine Karte und  $\alpha(I) \subset U$ , so gilt:

$$V(t) = \sum_{i=1}^n v_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\alpha(t)}.$$

$V$  ist genau dann differenzierbar, falls die Koeffizienten  $v_1, \dots, v_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar sind.

Eine kovariante Ableitung induziert eine kovariante Ableitung auf Vektorfeldern längs Kurven. Genauer gilt:

**Satz 2.4.10.** Sei  $\nabla$  eine kovariante Ableitung und  $\alpha : I \rightarrow M$  eine Kurve. Dann existiert genau eine lineare Abbildung

$$\frac{D}{dt} : \Gamma_\alpha(TM) \rightarrow \Gamma_\alpha(TM)$$

mit folgenden Eigenschaften:

(i)

$$\frac{D}{dt}(f \cdot V) = \dot{f} \cdot V + f \cdot \frac{D}{dt}V$$

für alle  $f \in C^\infty(I)$  und  $V \in \Gamma_\alpha(TM)$ .

(ii) Existiert eine lokale Fortsetzung von  $V$ , d.h. existiert zu  $t_0 \in I$  ein  $\epsilon > 0$ , so dass  $V : (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \rightarrow TM$  eine Fortsetzung  $\tilde{V}$  auf eine offene Menge  $U \subset M$  mit  $\alpha(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \subset U$  besitzt, so gilt:

$$\left(\frac{D}{dt}V\right)(t_0) = \left(\nabla_{\dot{\alpha}(t_0)}\tilde{V}\right)(\alpha(t_0))$$

**Bemerkung.** Nicht jedes Vektorfeld längs einer Kurve besitzt eine lokale Fortsetzung. Betrachte z.B. eine Punktkurve  $\alpha(t) = p$  für  $t \in I$ . Dann definiert jede differenzierbare Abbildung  $V : I \rightarrow T_pM$  ein Vektorfeld längs  $\alpha$ .  $V$  besitzt jedoch keine Fortsetzung, falls  $V$  nicht konstant ist.

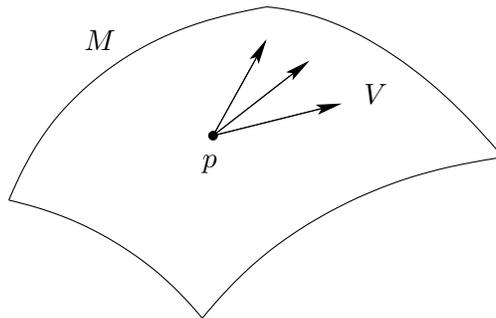


Abbildung 2.11:

*Beweis.* Eindeutigkeit:

Sei  $(x, U)$  eine Karte und  $\alpha(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \subset U$ . Dann besitzt  $V$  für  $t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$  die Darstellung:

$$V(t) = \sum_{j=1}^n v_j(t) \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_{\alpha(t)}.$$

Aus (i) und (ii) folgt:

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt} V(t_0) &\stackrel{(i)}{=} \sum_{j=1}^n \left( \dot{v}_j(t_0) \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_{\alpha(t_0)} + v_j(t_0) \frac{D}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \circ \alpha \right) (t_0) \right) \\ &\stackrel{(ii)}{=} \sum_{j=1}^n \left( \dot{v}_j(t_0) \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_{\alpha(t_0)} + v_j(t_0) \left( \nabla_{\dot{\alpha}(t_0)} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) (\alpha(t_0)) \right). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Daraus folgt die Eindeutigkeit.

Existenz:

Wie man durch Nachrechnen überprüft, definiert die Zeile (2.1) einen linearen Operator mit den verlangten Eigenschaften (i) und (ii). Da die Eigenschaften (i) und (ii) den Operator eindeutig bestimmen, ist die Definition unabhängig von der Wahl der Karten.  $\square$

**Bemerkung.** Benutzt man die Christoffelsymbole bezüglich einer Karte  $(x, U)$  und ist

$$x \circ \alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))$$

für  $t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ , so gilt  $\dot{\alpha}(t) = \sum_{i=1}^n \dot{\alpha}_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\alpha(t)}$ , und es folgt:

$$\frac{D}{dt} V(t_0) = \sum_{k=1}^n \left( \dot{v}_k(t_0) + \sum_{i,j=1}^n \dot{\alpha}_i(t_0) v_j(t_0) \Gamma_{ij}^k(\alpha(t_0)) \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_{\alpha(t_0)}$$

Von besonderer Bedeutung sind Vektorfelder, deren kovariante Ableitung verschwindet. Diese nennt man parallel.

**Definition 2.4.11.** (parallele Vektorfelder)

Ein Vektorfeld  $X : M \rightarrow TM$  heißt *parallel*, falls

$$\nabla_Y X(p) = 0$$

für alle Vektorfelder  $Y \in \Gamma(TM)$  sowie alle  $p \in M$  gilt. Sei  $\alpha : I \rightarrow M$  eine Kurve und  $V : I \rightarrow TM$  ein Vektorfeld längs  $\alpha$ . Dann heißt  $V$  *parallel längs  $\alpha$* , falls

$$\frac{D}{dt} V(t) = 0$$

für alle  $t \in I$  gilt.

Längs Kurven existieren immer parallele Vektorfelder. Genauer gilt:

**Satz 2.4.12.** Sei  $\alpha : I \rightarrow M$  eine Kurve und  $t_0 \in I$ . Sei  $v \in T_{\alpha(t_0)}M$ , so existiert genau ein paralleles Vektorfeld  $V : I \rightarrow TM$  längs  $\alpha$  mit  $V(t_0) = v$ . Ist  $\dim M = n$ , so bildet die Menge aller längs  $\alpha$  parallelen Vektorfelder

$$\Gamma_{\alpha}^{\text{par}}(TM)$$

einen  $n$ -dimensionalen Vektorraum über  $\mathbb{R}$ .

*Beweis.* Ist  $(x, U)$  eine Karte und  $\alpha(I) \subset U$ , so gilt:

$$\left(\frac{D}{dt}V\right)(t) = 0 \Leftrightarrow \dot{v}_k(t) + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(\alpha(t))\dot{\alpha}_i(t)v_j(t) = 0,$$

wobei  $V(t) = \sum_{j=1}^n v_j(t) \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_{\alpha(t)}$  und  $\alpha_i(t) = x_i \circ \alpha(t)$ . Dies ist eine lineare homogene Differentialgleichung 1. Ordnung, denn obige Gleichung ist äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{v}_n(t) \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} v_1(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

wobei

$$A(t)_{kj} = - \sum_{i=1}^n \Gamma_{ij}^k(\alpha(t))\dot{\alpha}_i(t).$$

Für jedes

$$v = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\alpha(t_0)} \in T_{\alpha(t_0)}M.$$

besitzt (2.2) genau eine Lösung mit

$$(v_1(t_0), \dots, v_n(t_0)) = (v_1, \dots, v_n).$$

Ist  $\alpha(I)$  nicht Teilmenge einer Koordinatenumgebung und  $t_0 \in I$ , so betrachte ein beliebiges kompaktes Intervall mit  $t_0 \in [a, b] \subset I$ .

Wegen der Kompaktheit des Intervalls  $[a, b]$  existiert eine Unterteilung  $a = s_0 < s_1 < \dots < s_k = b$  und Karten  $(x_i, U_i)$  mit  $\alpha(s_i, s_{i+1}) \subset U_i$ . Ist  $t_0 \in [s_j, s_{j+1}]$ , so folgt aus dem obigen Beweis die Existenz eines parallelen Vektorfeldes  $V : [s_j, s_{j+1}] \rightarrow TM$  mit  $V(t_0) = v$ . Da  $\alpha(s_i, s_{i+1}) \subset U_i$ , lässt sich  $V$  zu einem parallelen Vektorfeld auf ganz  $[a, b]$  fortsetzen. Ist das Intervall  $I$  nicht kompakt, so schreibe

$$I = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n],$$

wobei  $a_{n+1} \leq a_n < b_n \leq b_{n+1}$ . Dann setze  $V$  induktiv auf ganz  $I$  fort.

Die Menge  $\Gamma_{\alpha}^{par}(TM)$  aller längs  $\alpha$  parallelen Vektorfelder bilden einen Vektorraum über  $\mathbb{R}$ , denn wie oben gezeigt sind sie Lösung einer homogenen linearen Differentialgleichung. Insbesondere ist für  $t_0 \in I$  die Abbildung

$$L_{t_0}^{\alpha} : T_{\alpha(t_0)}M \rightarrow \Gamma_{\alpha}^{par}(TM),$$

wobei  $L_{t_0}^{\alpha}(v) : I \rightarrow TM$  das parallele Vektorfeld längs  $\alpha$  mit  $L_{t_0}^{\alpha}(v)(t_0) = v$  bezeichnet, ein linearer Isomorphismus. Somit ist  $\dim \Gamma_{\alpha}^{par}(TM) = n$ .  $\square$

**Definition 2.4.13.** Seien  $p, q \in M$  und  $\alpha : [t_0, t_1] \rightarrow M$  eine Kurve mit  $\alpha(t_0) = p$  und  $\alpha(t_1) = q$ . Dann heißt die Abbildung

$$P_{p,q}^{\alpha} : T_pM \rightarrow T_qM$$

mit  $P_{p,q}^{\alpha}(v) := L_{t_0}^{\alpha}(v)(t_1)$  die *Parallelverschiebung* von  $p$  nach  $q$  längs  $\alpha$ . Aus dem oben Gesagten folgt:

**Satz 2.4.14.** Die Parallelverschiebung  $P_{p,q}^\alpha : T_p M \rightarrow T_q M$  ist ein linearer Isomorphismus. Die Umkehrabbildung ist durch  $P_{q,p}^\alpha$  gegeben, wobei  $\bar{\alpha} : [t_0, t_1] \rightarrow M$  mit  $\bar{\alpha}(t) = \alpha(t_1 + t_0 - t)$  die umgekehrt durchlaufene Kurve  $\alpha$  bezeichnet.

**Bemerkungen.** (a) Die Parallelverschiebung hängt im allgemeinen von der Wahl der Kurve ab, jedoch nicht von der Parametrisierung. Der Beweis dieser Aussagen sei als Übung überlassen. Bezüglich des Standardzusammenhanges des  $\mathbb{R}^n$  ist die Parallelverschiebung unabhängig von der Wahl der Kurve.

(b) Die Parallelverschiebung läßt sich auch längs stückweise differenzierbarer Kurven erklären.

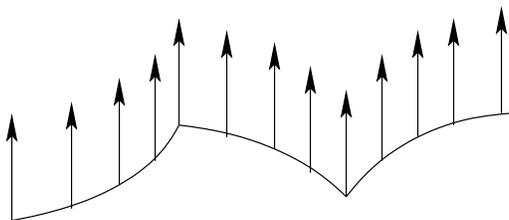


Abbildung 2.12:

(c) Sei

$$H_p := \{P_{p,p}^\alpha : T_p M \rightarrow T_p M \mid \alpha : [0, a] \rightarrow M \text{ stückweise differenzierbar mit } \alpha(0) = \alpha(a) = p\}.$$

Dann ist  $H_p$  eine Untergruppe von  $Gl(T_p M)$ , genannt *Holonomiegruppe*. Auf dem  $\mathbb{R}^n$  mit dem Standardzusammenhang besteht  $H_p$  nur aus der Identität.

Aus der Parallelverschiebung läßt sich die kovariante Ableitung zurückgewinnen.

**Satz 2.4.15.** Es sei  $\nabla$  ein Zusammenhang auf  $TM$ ,  $X, Y \in \Gamma(TM)$  seien Vektorfelder und  $\alpha : [0, \epsilon] \rightarrow M$  eine Kurve mit  $\dot{\alpha}(0) = X(p)$ . Sei  $\tilde{Y}(t) = (P_{p,\alpha(t)}^\alpha)^{-1} Y \circ \alpha(t) \in T_p M$ , so gilt

$$(\nabla_X Y)(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tilde{Y}(t) - \tilde{Y}(0)}{t}.$$

*Beweis.* Sei  $E_1, \dots, E_n$  eine Basis von  $T_p M$  und  $E_i(t) = P_{p,\alpha(t)}^\alpha E_i$  die Parallelverschiebung der  $E_i$  längs  $\alpha$ . Dann ist  $E_1(t), \dots, E_n(t)$  eine Basis von  $T_{\alpha(t)} M$ .

Schreibe

$$Y \circ \alpha(t) = \sum_{i=1}^n a_i(t) E_i(t),$$

so folgt:

$$\tilde{Y}(t) = (P_{p,\alpha(t)}^\alpha)^{-1} (Y \circ \alpha(t)) = \sum_{i=1}^n a_i(t) (P_{p,\alpha(t)}^\alpha)^{-1} (E_i(t)) = \sum_{i=1}^n a_i(t) E_i.$$

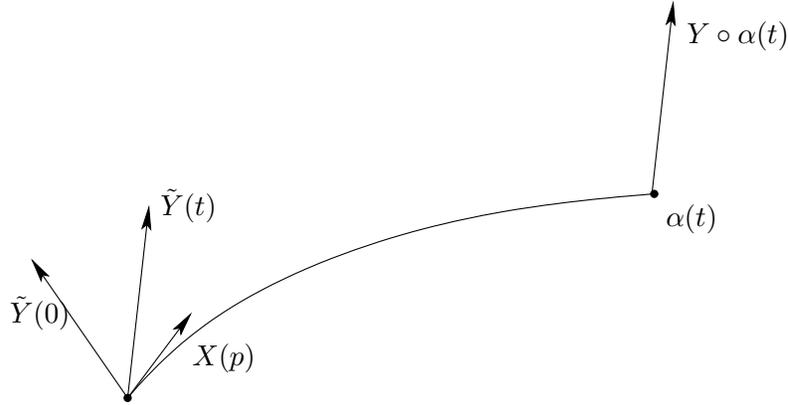


Abbildung 2.13:

Also erhalten wir

$$(\nabla_X Y)(p) = \frac{D}{dt}(Y \circ \alpha)(0) = \sum_{i=1}^n \dot{a}_i(0)E_i + a_i(0) \left( \frac{D}{dt} E_i \right)(0) = \sum \dot{a}_i(0)E_i$$

Auf der anderen Seite gilt:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tilde{Y}(t) - \tilde{Y}(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^n (a_i(t) - a_i(0))E_i}{t} = \sum_{i=1}^n \dot{a}_i(0)E_i.$$

□

## 2.5 Der Levi-Civita-Zusammenhang

Von großer Bedeutung sind Zusammenhänge, die mit einer Riemannschen Metrik kompatibel sind.

**Definition 2.5.1.** Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $\nabla$  ein Zusammenhang.  $\nabla$  heißt *Riemannsch*, falls für alle  $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$  gilt

$$X(g(Y, Z))(p) = g(\nabla_X Y(p), Z(p)) + g(Y(p), \nabla_X Z(p)).$$

**Lemma 2.5.2.** Sei  $(M, g)$  Riemannsche Mannigfaltigkeit. Ein Zusammenhang  $\nabla$  ist genau dann Riemannsch, falls für alle Kurven  $\alpha : I \rightarrow M$  und alle Vektorfelder  $Y, Z \in \Gamma_\alpha(TM)$  längs  $\alpha$  gilt

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} g(Y(t), Z(t)) = g \left( \frac{D}{dt} Y(t_0), Z(t_0) \right) + g \left( Y(t_0), \frac{D}{dt} Z(t_0) \right) \quad (2.3)$$

für alle  $t_0 \in I$ .

*Beweis.* Sei  $\nabla$  Riemannsch und  $p = \alpha(t_0)$ . Der Beweis von (2.3) ist einfach, falls sich  $Y, Z \in \Gamma_\alpha(TM)$  auf eine Umgebung von  $p = \alpha(t_0)$  fortsetzen lassen. Denn sind  $\tilde{Y}, \tilde{Z}$  Fortsetzungen von  $Y, Z$ , so gilt:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} g(Y(t), Z(t)) &= \dot{\alpha}(t_0)g(\tilde{Y}, \tilde{Z}) = g(\nabla_{\dot{\alpha}(t_0)}\tilde{Y}(p), \tilde{Z}(p)) + g(\tilde{Y}(p), \nabla_{\dot{\alpha}(t_0)}\tilde{Z}(p)) \\ &= g\left(\frac{D}{dt}Y(t_0), Z(t_0)\right) + g\left(Y(t_0), \frac{D}{dt}Z(t_0)\right). \end{aligned}$$

Falls dies nicht der Fall ist, führt die folgende Rechnung in lokalen Koordinaten zum Ziel. Sei dazu  $(x, U)$  eine Karte mit  $p \in U$ . Dann gilt (2.3) für jedes Paar  $X_i(t), X_j(t)$  von Basisfeldern mit

$$X_i(t) = \frac{\partial}{\partial x_i} \circ \alpha,$$

denn diese besitzen ja eine lokale Fortsetzung. Sei nun  $Y(t) = \sum_{i=1}^n a_i(t)X_i(t)$  und  $Z(t) = \sum_{j=1}^n b_j(t)X_j(t)$ , so folgt

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} g(Y(t), Z(t)) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} \sum_{i,j=1}^n a_i(t)b_j(t)g(X_i(t), X_j(t)) \\ &= \sum_{i,j=1}^n (a_i(t_0)\dot{b}_j(t_0) + \dot{a}_i(t_0)b_j(t_0))g(X_i(t_0), X_j(t_0)) \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^n a_i(t_0)b_j(t_0)\left(g\left(\frac{D}{dt}X_i(t_0), X_j(t_0)\right) + g\left(X_i(t_0), \frac{D}{dt}X_j(t_0)\right)\right). \end{aligned}$$

Auf der anderen Seite gilt

$$\begin{aligned} &g\left(\frac{D}{dt}Y(t_0), Z(t_0)\right) + g\left(Y(t_0), \frac{D}{dt}Z(t_0)\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \dot{a}_i(t_0)g(X_i(t_0), Z(t_0)) + \sum_{i=1}^n a_i(t_0)g\left(\frac{D}{dt}X_i(t_0), Z(t_0)\right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \dot{b}_j(t_0)g(Y(t_0), X_j(t_0)) + \sum_{j=1}^n b_j(t_0)g\left(Y(t_0), \frac{D}{dt}X_j(t_0)\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \dot{a}_i(t_0)b_j(t_0)g(X_i(t_0), X_j(t_0)) + \sum_{i,j=1}^n a_i(t_0)b_j(t_0)g\left(\frac{D}{dt}X_i(t_0), X_j(t_0)\right) \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^n \dot{b}_j(t_0)a_i(t_0)g(X_i(t_0), X_j(t_0)) + \sum_{i,j=1}^n b_j(t_0)a_i(t_0)g\left(X_i(t_0), \frac{D}{dt}X_j(t_0)\right). \end{aligned}$$

Sei nun (2.3) erfüllt und  $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ . Sei  $\alpha : (-\epsilon, +\epsilon) \rightarrow M$  eine Kurve mit  $\dot{\alpha}(0) = X(p)$ .

Dann gilt

$$\begin{aligned}
 X(p)(g(Y, Z)) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g(Y \circ \alpha, Z \circ \alpha) \\
 &= g\left(\frac{D}{dt}Y \circ \alpha(0), Z(p)\right) + (Y(p), \frac{D}{dt}Z \circ \alpha(0)) \\
 &= g(\nabla_X Y(p), Z(p)) + g(Y(p), \nabla_X Z(p)),
 \end{aligned}$$

d.h. der Zusammenhang ist Riemannsch.  $\square$

**Korollar 2.5.3.** Sei  $(M, g)$  Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Riemannischem Zusammenhang  $\nabla$ . Sei  $\alpha : I \rightarrow M$  eine Kurve und  $X, Y$  parallel längs  $\alpha$ . Dann ist die Funktion

$$t \mapsto g(X(t), Y(t))$$

konstant. Insbesondere ist die Parallelverschiebung

$$P_{t_0, t} := P_{\alpha(t_0), \alpha(t)} : (T_{\alpha(t_0)}M, g_{\alpha(t_0)}) \rightarrow (T_{\alpha(t)}M, g_{\alpha(t)})$$

eine lineare Isometrie.

*Beweis.* Sind  $X, Y$  parallele Vektorfelder längs  $\alpha$ , so folgt

$$\frac{d}{dt}g(X(t), Y(t)) = g\left(\frac{D}{dt}X(t), Y(t)\right) + g\left(X(t), \frac{D}{dt}Y(t)\right) = 0.$$

Sind  $v, w \in T_{\alpha(t_0)}M$  und  $X, Y$  parallel längs  $\alpha$  mit  $v = X(t_0)$  und  $w = Y(t_0)$ , so folgt

$$g(v, w) = g(X(t), Y(t)) = g(P_{t_0, t}(v), P_{t_0, t}(w)).$$

$\square$

Wir werden nun zeigen, dass Riemannsche Zusammenhänge immer existieren. Verlangen wir noch, dass der Zusammenhang torsionsfrei ist, so ist er eindeutig bestimmt.

**Satz 2.5.4.** (*Levi-Civita*)

Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann existiert genau ein Zusammenhang  $\nabla$  mit

- (a)  $\nabla$  ist Riemannsch,
- (b)  $\nabla$  ist torsionsfrei.

**Bemerkung.** Dieser Zusammenhang heißt *Levi-Civita-Zusammenhang*.

*Beweis.* Eindeutigkeit:

Seien  $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ . Dann gilt:

- (1)  $X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$
- (2)  $Y(g(Z, X)) = g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X)$
- (3)  $Z(g(X, Y)) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$

Aus der Addition von (1) und (2) und der Subtraktion von (3) erhalten wir:

$$\begin{aligned}
& X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X) - Z(g(X, Y))) \\
&= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) + g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X) - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y) \\
&= g(\nabla_X Y, Z) + g([X, Z], Y) + g([Y, Z], X) + g(Z, \nabla_Y X) \\
&= 2g(\nabla_X Y, Z) + g([X, Z], Y) + g([Y, Z], X) + g([Y, X], Z)
\end{aligned}$$

Dies impliziert:

$$\begin{aligned}
g(\nabla_X Y, Z) &= \frac{1}{2}(Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \\
&\quad -g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X) + g([X, Y], Z)) =: S(X, Y, Z)
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Damit ist die Eindeutigkeit gezeigt, denn sind  $\nabla$  und  $\tilde{\nabla}$  zwei Zusammenhänge mit den Eigenschaften (a) und (b), so gilt:

$$g((\nabla_X Y)(p), Z(p)) = S(X, Y, Z)(p) = g(\tilde{\nabla}_X Y(p), Z(p))$$

und somit folgt:

$$g((\nabla_X Y - \tilde{\nabla}_X Y)(p), Z(p)) = 0$$

für alle  $Z \in \Gamma(TM)$  und  $p \in M$ . Also gilt:

$$\nabla_X Y = \tilde{\nabla}_X Y$$

Um die Existenz zu zeigen, betrachte für festes  $X, Y \in \Gamma(TM)$  die Abbildung

$$L : \Gamma(TM) \rightarrow C^\infty(M)$$

mit

$$\begin{aligned}
L(Z) = S(X, Y, Z) &= \frac{1}{2}(Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \\
&\quad -g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X) + g([X, Y], Z).
\end{aligned}$$

Man rechnet leicht nach, dass  $L$  eine  $C^\infty(M)$ -lineare Abbildung ist, also ein Tensor vom Typ  $(0, 1)$ . Insbesondere hängt  $L(Z)(p)$  nur von  $Z(p)$  ab. Daher existiert für alle  $X, Y \in \Gamma(TM)$  und  $p \in M$  genau ein Vektor  $B_p(X, Y) \in T_p M$  mit

$$g(B_p(X, Y), Z(p)) = L(Z)(p) = S(X, Y, Z)(p).$$

Eine längere Rechnung zeigt:  $(\nabla_X Y)(p) := B_p(X, Y)$  definiert eine kovariante Ableitung mit den verlangten Eigenschaften.  $\square$

**Bemerkungen.** (a) Sei  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  der euklidischer Raum mit dem Standardskalarprodukt. Der in der Einleitung dieses Abschnittes eingeführte Zusammenhang  $\nabla : \Gamma(T\mathbb{R}^n) \times \Gamma(T\mathbb{R}^n) \rightarrow \Gamma(T\mathbb{R}^n)$  definiert durch  $\nabla_X Y(p) = DY(p)X(p)$  ist der Levi-Civita-Zusammenhang von  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .

(b) Sei  $g_0$  eine Riemannsche Metrik und betrachte für eine positive Konstante  $c$  die reskalierte Metric  $g = cg_0$ . Dann stimmen wegen 2.4 die Levi-Civita-Zusammenhänge von  $g_0$  und  $g$  überein.

**Satz 2.5.5.** (lokale Darstellung des Levi-Civita-Zusammenhanges)

Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $\nabla$  der Levi-Civita-Zusammenhang. Sei  $(x, U)$  eine Karte und  $g_{ij}(p) = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p\right)$ .

Dann gilt

$$\Gamma_{ij}^k(p) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{kl}(p) \left( \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p g_{il} - \frac{\partial}{\partial x_l}\Big|_p g_{ij} \right),$$

wobei  $(g^{kl}(p))$  die zu  $(g_{ij}(p))$  inverse Matrix bezeichnet.

*Beweis.*

$$g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_l}\right) = g\left(\sum_{m=1}^n \Gamma_{ij}^m \frac{\partial}{\partial x_m}, \frac{\partial}{\partial x_l}\right) = \sum_{m=1}^n \Gamma_{ij}^m g_{ml}$$

Da  $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0$  folgt andererseits aus (2.4)

$$g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_l}\right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{il} - \frac{\partial}{\partial x_l} g_{ij} \right).$$

Wegen

$$\sum_{l=1}^n g_{ml} g^{lk} = \delta_{mk}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^k &= \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \Gamma_{ij}^m g_{ml} g^{lk} = \sum_{l=1}^n g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_l}\right) g^{lk} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{lk} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{il} - \frac{\partial}{\partial x_l} g_{ij} \right). \end{aligned}$$

□

**Bemerkung.** Da  $g_{ij} = g_{ji}$  folgt auch  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ .

**Der Levi-Civita Zusammenhang von isometrisch eingebetteten Mannigfaltigkeiten.**

Sei  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle_M)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $N \subset M$  eine Untermannigfaltigkeit (siehe Def. 1.1.3). Betrachte auf  $N$  die durch  $M$  induzierte Metrik. Sind  $v, w \in T_p N \subset T_p M$ , so setze:

$$\langle v, w \rangle_N := \langle v, w \rangle_M.$$

Definiere für  $p \in N$

$$T_p N^\perp = \{w \in T_p M \mid \langle w, v \rangle_M = 0 \text{ für alle } v \in T_p N\},$$

dann gilt

$$T_p M = T_p N \oplus T_p N^\perp$$

d.h. zu jedem  $v \in T_p M$  existiert eine eindeutige Zerlegung

$$v = v^T + v^\perp \text{ mit } v^T \in T_p N \text{ und } v^\perp \in T_p N^\perp.$$

Sind  $X, Y \in \Gamma(TN)$  Vektorfelder auf  $N$  und  $\nabla^M$  der Levi-Civita Zusammenhang auf  $M$ , dann ist

$$\nabla_X^M Y(p) := \nabla_{\tilde{X}}^M \tilde{Y}(p),$$

wobei  $\tilde{X}, \tilde{Y}$  lokale Fortsetzungen der Vektorfelder  $X, Y$  in eine offene Umgebung von  $p$  in  $M$  darstellen, wohldefiniert, denn  $\nabla_{\tilde{X}}^M \tilde{Y}(p)$  hängt nur von  $\tilde{X}(p) = X(p)$  und den Werten von  $\tilde{Y}$  längs einer Kurve  $\gamma : (-\epsilon, +\epsilon) \rightarrow N$  mit  $\dot{\gamma}(0) = X(p)$  ab. Allerdings definiert  $\nabla_X^M Y$  im Allgemeinen auf  $N$  kein Vektorfeld mehr. Es gilt aber der folgende Satz.

**Satz 2.5.6.** *Sei  $\nabla^N$  der Levi-Civita-Zusammenhang auf  $N$  und  $X, Y \in \Gamma(TN)$ . Dann gilt für alle  $p \in N$*

$$\nabla_X^N Y(p) = (\nabla_X^M Y(p))^T.$$

*Beweis.* Der Beweis des Satzes sei als Übung überlassen. Zeigen Sie zunächst: Sind  $[\cdot, \cdot]_M$  und ebenso  $[\cdot, \cdot]_N$  die Lieklammern auf  $M$  und  $N$  und  $X, Y \in \Gamma(TN)$  und  $\tilde{X}, \tilde{Y}$  lokale Fortsetzungen von  $X, Y$  in eine offene Umgebung von  $p \in N$  in  $M$ , so gilt:

$$[X, Y]_N(p) = [\tilde{X}, \tilde{Y}]_M(p).$$

Benutzen Sie dann die Formel (2.4) im Beweis des Satzes 2.5.4. □



# Kapitel 3

## Geodätische und Vollständigkeit

### 3.1 Geodätische und ihre grundlegenden Eigenschaften

Ist  $\alpha : I \rightarrow M$  eine diffbare Kurve, so ist  $\dot{\alpha} : I \rightarrow TM$  ein Vektorfeld längs  $\alpha$ , das in jedem Punkt tangential zu  $\alpha$  ist. Wir nennen  $\dot{\alpha}$  das zu  $\alpha$  tangentiale Vektorfeld. Geodätische sind nun genau solche Kurven, für die das zugehörige tangentiale Vektorfeld parallel ist. Geodätische lassen sich somit für allgemeine Zusammenhänge definieren. Wir werden jedoch Geodätische nur für den Levi-Civita-Zusammenhang betrachten.

**Definition 3.1.1.** Sei  $(M, g)$  Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita-Zusammenhang  $\nabla$ . Eine Kurve  $c : I \rightarrow M$  heißt *Geodätische*, falls  $\dot{c} : I \rightarrow TM$  parallel längs  $c$  ist, d.h.

$$\frac{D}{dt}\dot{c}(t) = 0$$

für alle  $t \in I$ .

**Bemerkungen.** (a) Die Funktion  $t \mapsto g(\dot{c}(t), \dot{c}(t))$  ist konstant, denn

$$\frac{d}{dt}g(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) = 2g\left(\frac{D}{dt}\dot{c}(t), \dot{c}(t)\right) = 0.$$

(b) Sei  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  mit dem kanonischen Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Dann ist

$$\frac{D}{dt}\dot{c} = \ddot{c} = 0$$

Äquivalent zu  $c(t) = vt + b$  mit  $v, b \in \mathbb{R}^n$ . Also entsprechen den Geodätischen die Geraden des  $\mathbb{R}^n$ . Sie sind insbesondere die kürzeste Verbindung zwischen je zwei Punkten. Wir werden später sehen, dass für alle Riemannschen Mannigfaltigkeiten Geodätische wenigstens lokal kürzeste Kurven sind.

**Satz 3.1.2.** Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann gilt:

(a) Für alle  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $p \in M$  und  $v \in T_p M$  existiert ein  $\epsilon > 0$  und genau eine Geodätische  $c : (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \rightarrow M$  mit  $\dot{c}(t_0) = v$ .

(b) Sind  $c_1, c_2 : I \rightarrow M$  Geodätische mit  $\dot{c}_1(t_0) = \dot{c}_2(t_0)$  für ein  $t_0 \in I$ . Dann ist  $c_1(t) = c_2(t)$  für alle  $t \in I$ .

*Beweis.* (a) Sei  $(x, U)$  eine Karte mit  $p \in U$ . Ist  $c : I \rightarrow U$  eine Kurve, so ist

$$\dot{c}(t) = \sum_{k=1}^n \dot{c}_k(t) \frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_{c(t)},$$

wobei  $c_k = x_k \circ c$ . Ist

$$V(t) = \sum_{k=1}^n v_k(t) \frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_{c(t)}$$

ein Vektorfeld längs  $c$ , so ist

$$\frac{D}{dt} V(t) = \sum_{k=1}^n (\dot{v}_k(t) + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(c(t)) \dot{c}_i(t) v_j(t)) \frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_{c(t)}.$$

Daher ist  $\frac{D}{dt} \dot{c}(t) = 0$  äquivalent zu

$$\ddot{c}_k(t) + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(c(t)) \dot{c}_i(t) \dot{c}_j(t) = 0 \quad (3.1)$$

für alle  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Die Gleichung (3.1) ist eine gewöhnliche und im Allgemeinen nicht lineare Differentialgleichung 2. Ordnung. Wegen des Satzes von Picard-Lindelöf existiert zu vorgegebenen  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $(u_1, \dots, u_n) \in x(U)$  und  $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$  ein  $\epsilon > 0$  und genau eine Lösung

$$(c_1, \dots, c_n) : (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \rightarrow x(U)$$

mit  $c_i(t_0) = u_i$  und  $\dot{c}_i(t_0) = v_i$ . Ist  $x(p) = u$  und  $v = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$ , so ist

$$c := x^{-1} \circ (c_1, \dots, c_n) : (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \rightarrow M$$

die verlangte Geodätische.

(b) Sei  $A = \{t \in I \mid \dot{c}_1(t) = \dot{c}_2(t)\}$ . Da  $t_0 \in A$ , ist  $A \neq \emptyset$ . Da die Vektorfelder  $\dot{c}_1$  und  $\dot{c}_2$  stetig sind, ist  $A$  abgeschlossen in  $I$ . Wegen Teil (a) ist  $A$  auch offen in  $I$ . Da  $I$  zusammenhängend ist, ist  $A = I$ . □

**Korollar 3.1.3.** *Zu jedem  $v \in TM$  existiert genau eine maximale Geodätische  $c_v : I_v \rightarrow M$  mit  $0 \in I_v$  und  $\dot{c}_v(0) = v$ , d.h. ist  $c : I \rightarrow M$  eine weitere Geodätische mit  $\dot{c}(0) = v$ , so ist  $I \subset I_v$  und  $c_v(t) = c(t)$  für alle  $t \in I$ . Außerdem ist das Intervall  $I_v$  offen.*

*Beweis.* Sei

$$\mathcal{A} = \{I \mid 0 \in I \text{ und es existiert eine Geodätische } c : I \rightarrow M \text{ mit } \dot{c}(0) = v\}.$$

Definiere  $I_v := \bigcup_{I \in \mathcal{A}} I$ . Dann ist  $I_v \in \mathcal{A}$ , denn ist  $t \in I_v$ , so existiert ein  $I \in \mathcal{A}$  mit  $t \in I$  und somit eine Geodätische  $c : I \rightarrow M$  mit  $\dot{c}(0) = v$ . Setze  $c_v(t) = c(t)$ . Diese Definition ist wegen Satz 3.1.2(b) unabhängig von der Wahl von  $I$ .

$I_v$  ist offen, denn zu  $t_0 \in I_v$  existiert wegen Satz 3.1.2(a) ein  $\epsilon > 0$  mit  $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \subset I_v$ . □

**Lemma 3.1.4.** (*Reskalierungslemma*)

Sei  $0 \in I$  und  $c : I \rightarrow M$  die Geodätische mit  $\dot{c}(0) = v$ . Ist  $a \in \mathbb{R}$  und

$$\frac{1}{a}I := \{t \in \mathbb{R} \mid t \cdot a \in I\},$$

so ist  $\gamma : \frac{1}{a}I \rightarrow M$  mit  $\gamma(t) := c(a \cdot t)$  Geodätische mit  $\dot{\gamma}(0) = a \cdot v$ .

**Bemerkung.** Insbesondere ist  $\frac{1}{0}I = \mathbb{R}$ .

*Beweis.* Es gilt  $\dot{\gamma}(0) = av$ , denn für  $f \in C^\infty(M)$  folgt

$$\dot{\gamma}(0)(f) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ c)(at) = a \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ c)(t) = a \cdot \dot{c}(0)(f) = av(f).$$

Zu zeigen bleibt:  $\frac{D}{dt}\dot{\gamma}(t_0) = 0$  für alle  $t_0 \in \frac{1}{a}I$ .

Sei  $(x, U)$  Karte und  $x \circ \gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) = x \circ c(at) = (c_1(at), \dots, c_n(at))$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt}\dot{\gamma}(t_0) &= \sum_{k=1}^n (\ddot{\gamma}_k(t_0) + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(\gamma(t_0)) \dot{\gamma}_i(t_0) \dot{\gamma}_j(t_0)) \frac{\partial}{\partial x_k}(\gamma(t_0)) \\ &= \sum_{k=1}^n (a^2 \ddot{c}_k(at_0) + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(c(at_0)) a \dot{c}_i(t_0 a) \cdot a \dot{c}_j(t_0 a)) \frac{\partial}{\partial x_k}(c(at_0)) \\ &= a^2 \frac{D}{dt} \dot{c}(at_0) = 0. \end{aligned}$$

□

**Korollar 3.1.5.** Sei  $a \in \mathbb{R}$  und  $c_v : I_v \rightarrow M$  maximale Geodätische mit  $\dot{c}_v(0) = v$  und  $c_{av} : I_{av} \rightarrow M$  die maximale Geodätische mit  $\dot{c}_{av}(0) = av$ . Dann ist  $c_{av}(t) = c_v(at)$  und  $I_{av} = \frac{1}{a}I_v$ .

*Beweis.* Wegen Lemma 3.1.4 ist  $\gamma : \frac{1}{a}I_v \rightarrow M$  mit  $\gamma(t) = c_v(at)$  Geodätische mit  $\dot{\gamma}(0) = a \cdot v$ . Da  $\dot{c}_{av}(0) = av$ , folgt aus der Eindeutigkeit der Geodätischen  $c_v(at) = c_{av}(t)$  für alle  $t \in \frac{1}{a}I_v \cap I_{av}$ . Wegen der Maximalität von  $I_{av}$  und  $I_v$  ist  $\frac{1}{a}I_v \subset I_{av}$  und  $I_{av} \subset \frac{1}{a}I_v$ . □

**Definition 3.1.6.** Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.  $(M, g)$  heißt *geodätisch vollständig*, falls  $I_v = \mathbb{R}$  für alle  $v \in TM$ .

**Definition 3.1.7.** Sei  $(M, g)$  geodätisch vollständig. Dann heißt die Abbildung

$$\phi : \mathbb{R} \times TM \rightarrow TM \text{ mit } \phi(t, v) := \phi_t(v) := \dot{c}_v(t)$$

der *geodätische Fluß*.

**Bemerkungen.** (a)  $\phi$  ist ein *dynamisches System*, d.h.  $\phi_0(v) = v$  und

$$\phi_{t_1} \circ \phi_{t_2}(v) = \phi_{t_1+t_2}(v).$$

Dies folgt, denn

$$\phi_{t_1} \circ \phi_{t_2}(v) = \phi_{t_1}(\dot{c}_v(t_2)) = \dot{c}_{\dot{c}_v(t_2)}(t_1).$$

Da  $\gamma(t) := c_v(t_2+t)$  ebenfalls eine Geodätische ist mit  $\dot{\gamma}(0) = \dot{c}_v(t_2)$  folgt  $\gamma(t) = c_{\dot{c}_v(t_2)}(t)$  und somit

$$\dot{c}_{\dot{c}_v(t_2)}(t_1) = \dot{\gamma}(t_1) = \dot{c}_v(t_1+t_2) = \phi_{t_1+t_2}(v).$$

(b) Für  $r > 0$  betrachte die Menge

$$T^r M = \{v \in TM \mid \|v\| = \sqrt{g(v, v)} = r\}.$$

Dann ist  $\phi_t(T^r M) \subset T^r M$ , denn  $\|\dot{c}_v(t)\| = \|v\|$ .  $SM = T^1 M$  heißt *Einheitstangentienbündel*.

(c) Da  $c_{av}(t) = c_v(at)$ , ist  $\dot{c}_{av}(t) = a\dot{c}_v(at)$  und damit  $\phi_t(av) = a\phi_{at}(v)$ .

(d) Der geodätische Fluss wird durch ein Vektorfeld  $X_G : TM \rightarrow TTM$  mit

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t(v) = X_G(v) \in T_v TM$$

erzeugt. Man kann zeigen, dass  $\phi_t$  ein Hamiltonscher Fluß ist, wobei die Hamiltonfunktion  $G(v) = \frac{1}{2}g(v, v)$  durch die Riemannsche Metrik gegeben ist. Der Begriff des Hamiltonischen Flusses wird in der theoretischen Mechanik erklärt.

(e) Da das Einheitstangentienbündel einer kompakten Mannigfaltigkeit kompakt ist, sind kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeiten geodätisch vollständig. Wir werden bald ein allgemeineres Kriterium kennenlernen.

## 3.2 Die Exponentialabbildung

Von großer Bedeutung ist die Exponentialabbildung.

**Definition 3.2.1.** Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und

$$V = \{v \in TM \mid c_v \text{ ist auf } [0, 1] \text{ definiert}\}.$$

Dann heißt die Abbildung  $\exp : V \rightarrow M$  mit  $\exp(v) = c_v(1)$  die *Exponentialabbildung*. Ist  $p \in M$  und  $V_p = T_p M \cap V$ , so bezeichnen wir mit  $\exp_p : V_p \rightarrow M$  die Einschränkung von  $\exp$  auf  $V_p$ , d.h.  $\exp_p(v) = \exp(v)$ . Die Abbildung  $\exp_p$  heißt ebenfalls *Exponentialabbildung*.

**Bemerkungen.** (a) Ist  $v \in V$ , so ist auch  $t \cdot v \in V$  für  $t \in [0, 1]$ , denn  $\exp(tv) = c_{tv}(1) = c_v(t)$ . Ausserdem gilt:

$$L(c_v[0, 1]) = \int_0^1 \|\dot{c}_v(t)\| dt = \|v\|$$

(b)  $V$  ist offene Umgebung des Nullschnittes  $T^0 M = \{0_p \mid p \in M\}$ . Aus der differenzierbaren Abhängigkeit der Geodätischen von den Anfangswerten folgt die Differenzierbarkeit der Exponentialabbildung  $\exp : V \rightarrow M$ .

**Satz 3.2.2.** Sei  $\pi : TM \rightarrow M$  die kanonische Projektion und  $\pi \times \exp : V \rightarrow M \times M$  die Abbildung mit

$$\pi \times \exp(v) = (\pi(v), \exp(v)).$$

Zu jedem Punkt  $p \in M$  existiert eine offene Umgebung  $W \subset TM$  von  $0_p \in T_p M$  und eine offene Umgebung  $\tilde{W} \subset M \times M$  von  $(p, p)$ , so dass  $\pi \times \exp : W \rightarrow \tilde{W}$  ein Diffeomorphismus ist.

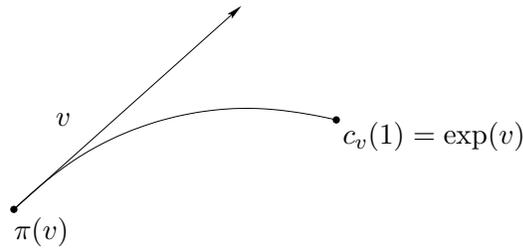


Abbildung 3.1:

**Bemerkungen.** •  $\pi \times \exp$  ordnet also jedem Vektor  $v \in V$  den Anfangs- und Endpunkt der Geodätischen  $c_v : [0, 1] \rightarrow M$  zu.

- Der Satz zeigt: Ist  $U$  eine offene Umgebung von  $p \in M$  mit  $U \times U \subset \tilde{W}$ , so existiert für jedes Paar  $q, q' \in U$  genau ein Vektor  $v \in T_q M \cap W$  mit  $c_v(1) = q'$ . Dabei hängt  $v$  differenzierbar von  $q$  und  $q'$  ab.

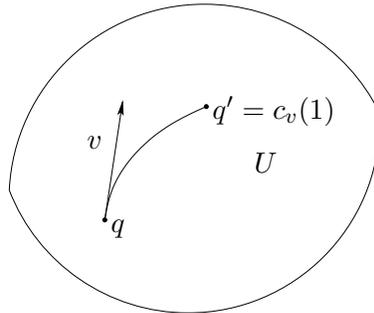


Abbildung 3.2:

- Sei  $W_p = T_p M \cap W$ . Dann ist

$$\exp_p : W_p \rightarrow \tilde{W}_p = \{q \in M \mid (p, q) \in \tilde{W}\}$$

ein Diffeomorphismus, denn

$$\exp_p(v) = \pi_2((\pi \times \exp)(v)),$$

wobei  $\pi_2 : M \times M \rightarrow M$  die Projektion auf die zweite Komponente bezeichnet. Da sowohl  $\pi \times \exp : W_p \rightarrow \{p\} \times \tilde{W}_p$  als auch  $\pi_2 : \{p\} \times \tilde{W}_p \rightarrow \tilde{W}_p$  Diffeomorphismen sind, folgt die Behauptung.

*Beweis.* Sei  $0_p \in T_p M$  Nullvektor in  $T_p M$ :

$$\pi \times \exp(0_p) = (p, \exp 0) = (p, p).$$

Wir zeigen, dass das Differential

$$D(\pi \times \exp)(0_p) : T_{0_p}TM \rightarrow T_{(p,p)}(M \times M) = T_pM \times T_pM.$$

invertierbar ist. Die Behauptung folgt dann aus dem inversen Funktionensatz. Betrachte eine Karte  $(x, U)$  mit  $p \in U$  und  $x(p) = 0$ . Dann ist  $Tx : TU \rightarrow x(U) \times \mathbb{R}^n$  mit

$$Tx(v) = (x(\pi(v)), Dx(\pi(v))(v))$$

eine Karte von  $TM$  definiert auf der offenen Umgebung  $TU$  von  $0_p$ . Ausserdem ist

$$x \times x : U \times U \rightarrow x(U) \times x(U) \text{ mit } x \times x(p_1, p_2) = (x(p_1), x(p_2))$$

eine Karte von  $M \times M$  definiert auf der offenen Umgebung  $U \times U$ . Betrachte die lokale Darstellung

$$f = (x \times x) \circ (\pi \times \exp) \circ (Tx)^{-1},$$

so gilt

$$f(u, 0) = (x \times x) \circ (\pi \times \exp)(0_{x^{-1}(u)}) = (x \times x)(x^{-1}(u), x^{-1}(u)) = (u, u)$$

und

$$f(0, \xi) = (x \times x) \circ (\pi \times \exp)(Dx^{-1}(0)\xi) = (x \times x)(p, \exp(Dx^{-1}(0)\xi)) = (0, x \circ \exp(Dx^{-1}(0)\xi)).$$

Dann folgt

$$Df(0, 0)(u, 0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(ut, 0) = (u, u)$$

und

$$\begin{aligned} Df(0, 0)(0, \xi) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(0, t\xi) = \left( 0, \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} x \circ \exp(tDx^{-1}(0)\xi) \right) \\ &= \left( 0, \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} x \circ c_{Dx^{-1}(0)\xi}(t) \right) \\ &= (0, Dx(p)Dx^{-1}(0)\xi) = (0, \xi). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ \text{id} & \text{id} \end{pmatrix} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}.$$

Insbesondere ist damit  $Df(0, 0)$  invertierbar, und die Behauptung folgt aus dem inversen Funktionentheorem.  $\square$

Die oben genannten Bemerkungen lassen sich wie folgt präzisieren:

**Korollar 3.2.3.** *Sei  $p \in M$ , so existiert eine offene Umgebung  $U$  von  $p$  und ein  $\epsilon > 0$ , so dass gilt:*

- (a) *Für alle  $q, q' \in U$  existiert ein eindeutig bestimmter Vektor  $v \in T_qM$  mit  $\|v\| < \epsilon$  und  $\exp v = q'$ . Diese Abbildung ist differenzierbar.*
- (b) *Für alle  $q \in U$  ist  $\exp_q : B(0_q, \epsilon) \rightarrow \exp_q(B(0_q, \epsilon))$  ein Diffeomorphismus.*

*Beweis.* (a) Wegen Satz 3.2.2 existiert eine offene Umgebung  $W \subset TM$  von  $0_p$  und  $\tilde{W} \subset M \times M$ , so dass

$$\pi \times \exp : W \rightarrow \tilde{W}$$

ein Diffeomorphismus ist. Wähle eine offene Umgebung  $\tilde{U}$  von  $p$  und ein  $\epsilon > 0$ , so dass

$$B^\epsilon \tilde{U} := \{v \in T_q M \mid q \in \tilde{U}, \|v\| < \epsilon\} \subset W.$$

Dies ist möglich, denn die Topologie auf  $TM$  wird von den Mengen der Form  $B^\epsilon \tilde{U}$  erzeugt. Da  $(\pi \times \exp)(B^\epsilon \tilde{U})$  eine offene Umgebung von  $(p, p)$  ist, existiert eine offene Umgebung  $U$  von  $p$  mit  $U \times U \subset (\pi \times \exp)(B^\epsilon \tilde{U})$ . Also existiert zu  $q, q' \in U$  genau ein Vektor  $v \in T_q M$  mit  $\|v\| < \epsilon$  und  $\exp(v) = q'$ .

(b) Da  $U \subset \tilde{U}$ , ist für  $q \in U$

$$B(0_q, \epsilon) = \{v \in T_q M \mid \|v\| < \epsilon\} \subset B^\epsilon \tilde{U}.$$

Also ist die Abbildung

$$\pi \times \exp : B(0_q, \epsilon) \rightarrow (\pi \times \exp)(B(0_q, \epsilon)) \subset M \times M$$

mit  $v \rightarrow (q, \exp_q(v))$  ein Diffeomorphismus. Dann ist auch

$$\exp_q : B(0_q, \epsilon) \rightarrow \exp_q B(0_q, \epsilon) \subset M$$

mit  $v \rightarrow \exp_q(v)$  ein Diffeomorphismus.

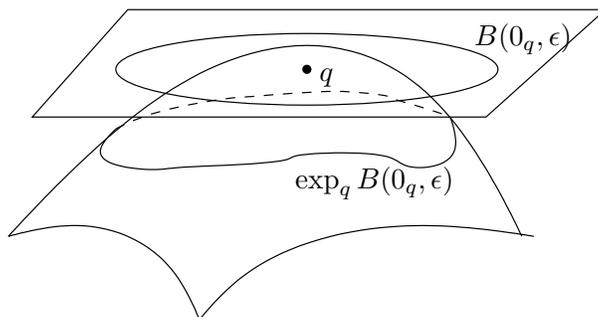


Abbildung 3.3:

□

Wie wir gesehen haben, ist für jedes  $p \in M$  die Exponentialabbildung  $\exp_p : V_p \rightarrow M$  eine differenzierbare Abbildung, die auf einer offenen Teilmenge des Tangentialraumes  $T_p M$  definiert ist. Wir werden nun in dem folgenden Lemma, das auf Carl Friedrich Gauß zurückgeht, eine wichtige geometrische Eigenschaft ihres Differentials

$$D \exp_p(v) : T_v T_p M \rightarrow T_{\exp_p(v)} M$$

formulieren. Wie bei Vektorräumen üblich werden wir  $T_v T_p M = \{v\} \times T_p M$  mit  $T_p M$  durch Weglassen des Fußpunktes identifizieren. Sind  $t \in \mathbb{R}$  und  $v \in T_p M$  so gewählt, dass  $tv \in V_p$ ,

so ist  $\exp_p(tv) = c_v(t)$ . Aus der Kettenregel folgt somit  $D \exp_p(tv)(v) = \dot{c}_v(t)$ . Insbesondere ist

$$\text{id} = D \exp_p(0) : T_p M \rightarrow T_p M$$

**Lemma 3.2.4.** (Gauß-Lemma)

Betrachte für  $p \in M$  die Exponentialabbildung  $\exp_p : V_p \rightarrow M$ . Sei  $v \in T_p M$  und  $a > 0$ , so dass  $\{vt \mid 0 \leq t \leq a\} \subset V_p$ . Dann gilt

$$g(D \exp_p(tv)(w), D \exp_p(tv)(v)) = g(w, v)$$

für alle  $t \in [0, a]$  und  $w \in T_p M$ . Insbesondere ist  $\|D \exp_p(tv)(v)\| = \|v\|$  und  $D \exp_p(tv)(w) \perp \dot{c}_v(t)$ , falls  $w \perp v$ .

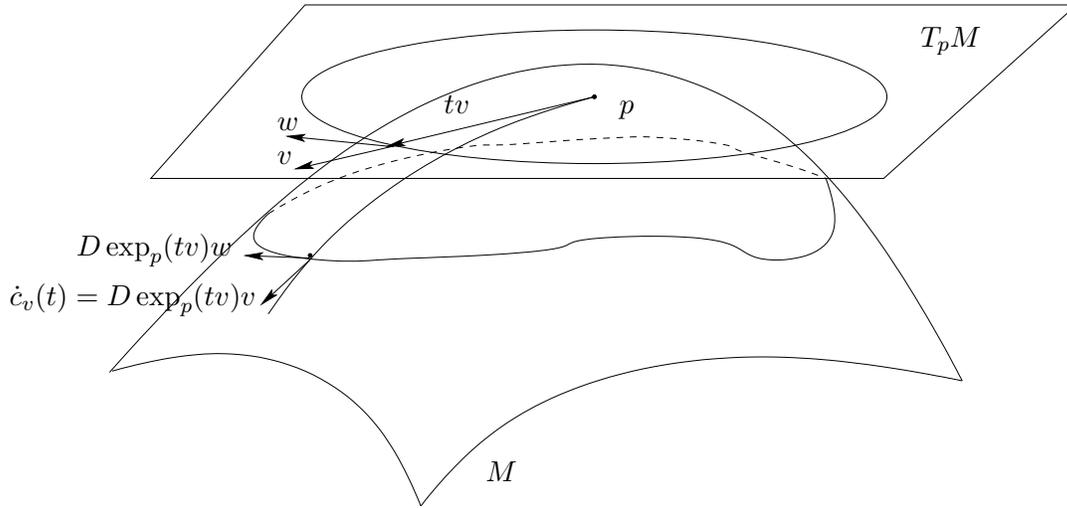


Abbildung 3.4:

*Beweis.* Da  $\text{id} = D \exp(0)$ , folgt die Aussage für  $t = 0$ . Betrachte für  $\delta > 0$  hinreichend klein die Abbildung  $X : (-\delta, \delta) \times [0, a] \rightarrow V_p$  mit  $X(s, t) = t(v + sw)$ . Betrachte  $\alpha : (-\delta, \delta) \times [0, a] \rightarrow M$  mit  $\alpha(s, t) = \exp_p X(s, t)$ . Insbesondere ist  $\alpha(0, t) = c_v(t)$  und

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} \alpha(s, t) &= D \exp_p(tv) \left( \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} X(s, t) \right) \\ &= D \exp_p(tv)(tw) = t D \exp_p(tv)(w). \end{aligned}$$

Somit ist

$$h(t) := g \left( \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} \alpha(s, t), \left. \frac{\partial}{\partial t} \alpha(0, t) \right) = tg(D \exp_p(tv)(w), D \exp_p(tv)(v)). \quad (3.2)$$

Da  $\nabla$  Riemannsch ist, folgt

$$\begin{aligned} h'(t) &= g \left( \left. \frac{D}{dt} \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} \alpha(s, t), \left. \frac{\partial}{\partial t} \alpha(0, t) \right) + g \left( \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} \alpha(s, t), \left. \frac{D}{dt} \frac{\partial}{\partial t} \alpha(0, t) \right) \\ &= g \left( \left. \frac{D}{dt} \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} \alpha(s, t), \left. \frac{\partial}{\partial t} \alpha(0, t) \right) \end{aligned}$$

Der zweite Term verschwindet, da  $t \mapsto \alpha(0, t)$  eine Geodätische ist. Da  $\nabla$  torsionsfrei ist, folgt aus dem noch zu beweisenden Symmetriemaß 3.2.5:

$$\frac{D}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \alpha(s, t) = \frac{D}{\partial s} \Big|_{s=0} \frac{\partial}{\partial t} \alpha(s, t).$$

Verwenden wir wieder, dass  $\nabla$  Riemannsch ist, so erhalten wir somit

$$h'(t) = g \left( \frac{D}{\partial s} \Big|_{s=0} \frac{\partial}{\partial t} \alpha(s, t), \frac{\partial}{\partial t} \alpha(0, t) \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} g \left( \frac{\partial}{\partial t} \alpha(s, t), \frac{\partial}{\partial t} \alpha(s, t) \right).$$

Aus  $\frac{\partial}{\partial t} \alpha(s, t) = \dot{c}_{v+sw}(t)$  folgt nun

$$h'(t) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} g(\dot{c}_{v+sw}(t), \dot{c}_{v+sw}(t)) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} g(v + sw, v + sw) = g(w, v)$$

und somit ist  $h(t) - h(0) = h(t) = tg(w, v)$ . Andererseits ist wegen (3.2)

$$h(t) = tg(D \exp_p(tv)(w), D \exp_p(tv)(v)) = tg(w, v)$$

und wir erhalten das Gauss-Lemma auch für alle  $t \in (0, a]$ . □

Der Beweis des Gauß-Lemmas ist vollständig, wenn wir die Vertauschbarkeit der kovarianten partiellen Ableitungen gezeigt haben.

**Lemma 3.2.5.** (Symmetriemaß)

Sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einem torsionsfreien Zusammenhang  $\nabla$ . Sei  $W \subset \mathbb{R}^2$  offen und  $\alpha : W \rightarrow M$  mit  $(s, t) \rightarrow \alpha(s, t)$  sei 2-mal differenzierbar. Dann gilt:

$$\frac{D}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} \alpha = \frac{D}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} \alpha$$

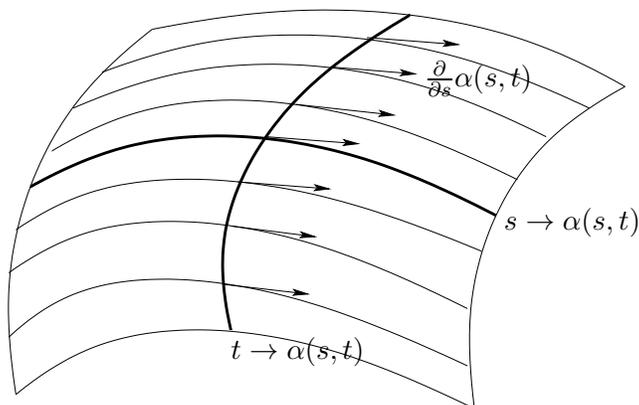


Abbildung 3.5:

*Beweis.* Da die Aussage lokaler Natur ist, können wir annehmen, dass  $\alpha(W)$  im Definitionsbereich einer Karte  $(x, U)$  liegt. Sei  $(\alpha_1(s, t), \dots, \alpha_n(s, t)) = x \circ \alpha(s, t)$ . Dann gilt (unter Weglassung der Argumente):

$$\begin{aligned} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial s} &= \frac{D}{\partial t} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial \alpha_i}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{D}{\partial t} \left( \frac{\partial \alpha_i}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial t \partial s} \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial s} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \end{aligned}$$

Da

$$\frac{D}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_i} = \nabla_{\frac{\partial \alpha}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial x_i} = \nabla_{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \alpha_j}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \alpha_j}{\partial t} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

folgt

$$\frac{D}{\partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial s} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial t \partial s} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \alpha_i}{\partial s} \frac{\partial \alpha_j}{\partial t} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Durch Vertauschung von  $s$  und  $t$  erhalten wir:

$$\frac{D}{\partial s} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial s \partial t} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} \frac{\partial \alpha_j}{\partial s} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Die ersten Summen stimmen überein, da man die partiellen Ableitungen bei zweimal differenzierbaren Funktionen wegen des Lemmas von Schwarz vertauschen darf.

Die zweiten Summen stimmen überein wegen der Torsionsfreiheit. Genauer:

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \alpha_i}{\partial s} \frac{\partial \alpha_j}{\partial t} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \alpha_j}{\partial s} \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \alpha_j}{\partial s} \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

□

Wir zeigen nun, dass Geodätische lokal Kürzeste sind. Dazu zeigen wir zunächst das folgende Lemma.

**Lemma 3.2.6.** *Seien  $\exp_p : V_p \rightarrow M$  die Exponentialabbildung,  $v \in T_p M$ ,  $v \neq 0$  und  $a > 0$  so gewählt, dass die radiale Gerade  $\phi : [0, a] \rightarrow T_p M$  mit  $\phi(t) = tv$  ganz in  $V_p$  enthalten ist. Sei  $\psi : [0, a] \rightarrow V_p$  stückweise differenzierbare Kurve mit  $\psi(0) = \phi(0) = 0$  und  $\psi(a) = \phi(a) = av$ . Dann gilt:*

$$L(\exp_p \circ \psi) \geq L(\exp_p \circ \phi) = a \|v\|.$$

Ist  $D \exp_p(\psi(t)) : T_p M \rightarrow T_{\exp_p(\psi(t))} M$  invertierbar für alle  $t \in [0, a]$  und ist

$$L(\exp_p \circ \psi) = L(\exp_p \circ \phi),$$

so folgt  $\psi[0, a] = \phi[0, a]$ . Ist darüberhinaus  $t \mapsto \|\psi'(t)\|$  konstant, so folgt  $\psi = \phi$ .

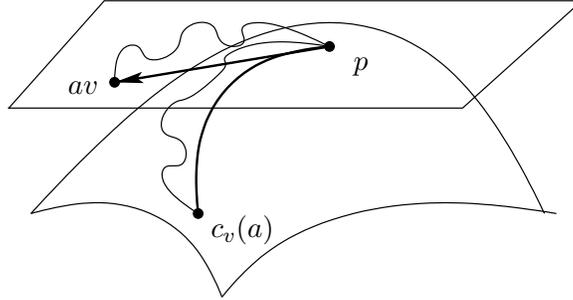


Abbildung 3.6:

*Beweis.* Es genügt die Aussage des Lemmas für alle  $\psi$  mit der zusätzlichen Eigenschaft  $\psi(t) \neq 0$  für alle  $t \in (0, a]$  zu beweisen. Denn ist  $t_0 \in (0, a]$  der größte Wert mit  $\psi(t_0) = 0$ , so betrachte die Einschränkung von  $\psi$  auf  $[t_0, a]$ . Insbesondere ist  $L(\exp_p \circ \psi) \geq L(\exp_p \circ \psi|_{[t_0, a]})$ . Sei nun  $\psi(t) \neq 0$  für alle  $t \in (0, a]$  und schreibe  $\psi(t) = r(t)v(t)$  mit  $\|v(t)\| = \|v\|$  und  $r(0) = 0, r(a) = a, v(a) = v$ . Dann gilt für alle Teilintervalle  $[t_i, t_{i+1}]$  von  $[0, a]$  auf denen  $\psi$  differenzierbar ist:

$$\psi'(t) = r'(t)v(t) + r(t) \cdot v'(t).$$

Da  $t \rightarrow \|v(t)\|$  konstant ist, folgt  $v'(t) \perp v(t)$ . Mit Hilfe des Gauß-Lemmas gilt für alle  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ :

$$D \exp_p(r(t)v(t))v'(t) \perp D \exp_p(r(t)v(t))v(t)$$

Somit erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d}{dt}(\exp_p \circ \psi)(t) \right\|^2 &= \|D \exp_p(\psi(t))(\psi'(t))\|^2 \\ &= \|D \exp_p(\psi(t))r'(t)v(t) + D \exp_p(\psi(t))r(t)v'(t)\|^2 \\ &= \|r'(t)D \exp_p(r(t)v(t))v(t) + r(t)D \exp_p(r(t)v(t))v'(t)\|^2 \\ &= |r'(t)|^2 \|v\|^2 + |r(t)|^2 \|D \exp_p(r(t)v(t))v'(t)\|^2 \\ &\geq |r'(t)|^2 \|v\|^2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} L(\exp_p \circ \psi) &= \int_0^a \left\| \frac{d}{dt} \exp_p \circ \psi(t) \right\| dt \geq \|v\| \int_0^a |r'(t)| dt \\ &\geq \|v\| \left| \int_0^a r'(t) dt \right| = \|v\| |r(a) - r(0)| = a \|v\| = L(\exp_p \circ \phi). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Ist  $D \exp_p(\psi(t))$  bijektiv, so folgt im Gleichheitsfall für alle  $t \in [0, a]$  wegen (3.3):  $v'(t) = 0$ . Außerdem folgt aus (3.4):  $r'(t) \geq 0$  für alle  $t \in [0, a]$ . Somit ist  $v(t) = v$  sowie  $\psi([0, a]) = \phi([0, a])$ . Ist zusätzlich  $\|\psi'(t)\| = r'(t)\|v\|$  konstant, so ist  $r(t) = t$  wegen  $r(0) = 0$  und  $r(a) = a$ . Somit ist  $\psi(t) = tv = \phi(t)$ .  $\square$

**Satz 3.2.7.** Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $p \in M$ . Sei  $\epsilon > 0$  so gewählt, dass

$$\exp_p : B(0_p, \epsilon) \rightarrow \exp_p(B(0_p, \epsilon))$$

ein Diffeomorphismus ist. Ist  $v \in B(0_p, \epsilon)$ , so ist

$$d(\exp_p(v), p) = \|v\| = L(c_v)$$

wobei  $c_v : [0, 1] \rightarrow M$  die Geodätische ist mit  $c_v(t) = \exp_p(tv)$ . Ist  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  eine weitere stückweise differenzierbare Kurve mit  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma(1) = \exp_p(v)$  und  $L(\gamma) = \|v\|$ , so folgt:  $\gamma([0, 1]) = c_v([0, 1])$ . Ist darüberhinaus  $t \mapsto \|\dot{\gamma}(t)\|$  konstant, so ist  $\gamma(t) = c_v(t)$  für alle  $t \in [0, 1]$ . Außerdem stimmt  $\exp_p(B(0_p, \epsilon))$  mit dem metrischen Ball von Radius  $\epsilon$  um  $p$  überein, d.h.

$$\exp_p(B(0_p, \epsilon)) = B(p, \epsilon) := \{q \in M \mid d(p, q) < \epsilon\}.$$

*Beweis.* Aus  $L(c_v) = \int_0^1 \|\dot{c}_v(t)\| dt = \|v\|$  folgt  $d(\exp_p(v), p) \leq \|v\|$ . Sei  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  eine beliebige stückweise differenzierbare Kurve mit  $\gamma(0) = p$  und  $\gamma(1) = \exp_p(v)$ . Wir zeigen  $L(\gamma) \geq \|v\|$ . Dann ist auch

$$\begin{aligned} d(p, \exp_p(v)) &= \inf\{L(\gamma) \mid \gamma : [0, 1] \rightarrow M \text{ stückweise differenzierbar,} \\ &\quad \gamma(0) = p, \gamma(1) = \exp_p(v)\} \\ &\geq \|v\|. \end{aligned}$$

Zum Beweis dieser Aussage nehme zunächst an, dass  $\gamma[0, 1] \subset \exp_p(B(0_p, \epsilon))$ . Betrachte  $\psi(t) = \exp_p^{-1}(\gamma(t))$ . Dann ist wegen des obigen Lemmas 3.2.6

$$L(\gamma) = L(\exp_p \circ \psi) \geq L(\exp_p \circ \phi) = \|v\|,$$

wobei  $\phi : [0, 1] \rightarrow T_p M$  die Gerade mit  $\phi(t) = tv$  beschreibt. Ist  $L(\gamma) = \|v\|$ , so ist  $\psi[0, 1] = \phi[0, 1]$  und somit  $\gamma[0, 1] = c_v[0, 1]$ . Ist darüberhinaus  $t \mapsto \|\dot{\gamma}(t)\|$  konstant, so ist  $\gamma(t) = c_v(t)$  für alle  $t \in [0, 1]$ .

Sei nun  $\gamma[0, 1] \not\subset \exp_p(B(0_p, \epsilon))$ , so folgt  $L(\gamma) \geq \epsilon$  und somit  $L(\gamma) > \|v\|$ . Denn da die Menge  $\exp_p(B(0_p, \epsilon))$  offen ist, folgt

$$\{s \in [0, 1] \mid \gamma[0, s] \subset \exp_p(B(0_p, \epsilon))\} = [0, s_0]$$

für ein  $s_0 \in [0, 1]$ . Sei nun  $s_n \in [0, 1]$  eine monoton steigende gegen  $s_0$  konvergente Folge, so gilt

$$L(\gamma) \geq L(\gamma[0, s_n]) \geq \|\exp_p^{-1}(\gamma(s_n))\| \rightarrow \epsilon$$

für  $n \rightarrow \infty$ .

Mit dem bisher Gezeigten erhalten wir schließlich:  $\exp_p(B(0_p, \epsilon)) = B(p, \epsilon)$ . Denn ist  $v \in B(0_p, \epsilon)$ , so auch  $d(p, \exp_p(v)) = \|v\| < \epsilon$ .

Ist umgekehrt  $q \in B(p, \epsilon)$ , so existiert eine stückweise differenzierbare Kurve  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  mit  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma(1) = q$  und  $L(\gamma) < \epsilon$ . Daher ist wie oben gezeigt  $\gamma[0, 1] \subset \exp_p(B(0_p, \epsilon))$ .  $\square$

**Bemerkung.** Ist

$$\bar{B}(p, r) = \{q \in M \mid d(p, q) \leq r\}$$

der abgeschlossene metrische (geodätische) Ball und

$$S(p, r) = \{q \in M \mid d(p, q) = r\}$$

die metrische Sphäre (geodätische Sphäre) um  $p$ , so gilt: Ist  $\exp_p : B(0_p, \epsilon) \rightarrow \exp_p(B(0_p, \epsilon))$  ein Diffeomorphismus und  $0 < r < \epsilon$ , so folgt

$$\bar{B}(p, r) = \exp_p(\bar{B}(0_p, r))$$

sowie

$$S(p, r) = \exp_p(S(0_p, r)),$$

wobei  $S(0_p, r) = \{v \in T_p M \mid \|v\| = r\}$ . Damit sind sowohl die abgeschlossenen und offenen Bälle sowie die Sphären in  $(T_p M, g_p)$  diffeomorph zu den entsprechenden metrischen Bällen und Sphären in  $M$ , falls ihre Radien kleiner als  $\epsilon$  sind. Insbesondere sind  $\bar{B}(p, r)$  und  $S(p, r)$  kompakt und  $S(p, r)$  ist  $(n-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $M$ , falls  $\dim M = n$ .

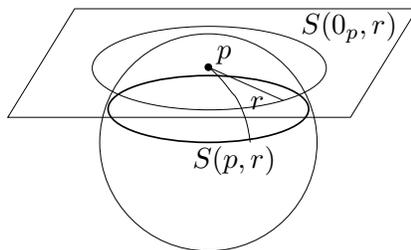


Abbildung 3.7:

**Korollar 3.2.8.** (*Charakterisierung von Geodätischen*)

Sei  $c : I \rightarrow M$  eine stückweise differenzierbare Kurve, so dass  $t \mapsto \|\dot{c}(t)\|$  konstant ist. Dann folgt:  $c$  ist genau dann eine Geodätische, falls für alle  $t \in I$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass

$$d(c(t - \delta), c(t + \delta)) = L(c[t - \delta, t + \delta]).$$

*Beweis.* Sei  $c$  eine Geodätische mit  $p = c(t)$ . Wegen Korollar 3.2.3 existiert eine offene Umgebung  $U$  von  $p$  und ein  $\epsilon > 0$ , so dass  $\exp_q : B(0_q, \epsilon) \rightarrow \exp(B(0_q, \epsilon))$  für alle  $q \in U$  ein Diffeomorphismus ist. Dann ist wegen Satz 3.2.7 jede Geodätische  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  mit  $\gamma(a) = q \in U$  und  $L(\gamma) < \epsilon$  minimal. Wähle nun  $\delta > 0$ , so dass  $q = c(t - \delta) \in U$  und  $L(c[t - \delta, t + \delta]) < \epsilon$ . Also gilt  $d(c(t - \delta), c(t + \delta)) = L(c[t - \delta, t + \delta])$ .

Sei nun  $c : I \rightarrow M$  eine beliebige stückweise differenzierbare und lokal minimierende Kurve mit  $t \mapsto \|\dot{c}(t)\|$  konstant. Wie oben sei  $U$  eine offene Umgebung von  $p = c(t)$  und  $\epsilon > 0$ , so dass  $\exp_q : B(0_q, \epsilon) \rightarrow \exp_p(B(0_q, \epsilon))$  für alle  $q \in U$  ein Diffeomorphismus ist. Da  $c$  stetig und lokal minimierend ist, existiert ein  $\delta > 0$  mit

$$q = c(t - \delta) \in U, \quad c[t - \delta, t + \delta] \subset B(q, \epsilon) \quad \text{und} \quad d(c(t - \delta), c(t + \delta)) = L(c[t - \delta, t + \delta]).$$

Wegen Satz 3.2.7 ist  $c[t - \delta, t + \delta]$  eine Geodätische. Insbesondere ist  $\frac{D}{dt}\dot{c}(t) = 0$ . Da  $t \in I$  beliebig ist, folgt dies für alle  $t \in I$ .  $\square$

**Korollar 3.2.9.** Sei  $c : [a, b] \rightarrow M$  stückweise differenzierbare Kurve, so dass  $t \mapsto \|\dot{c}(t)\|$  konstant ist. Ist  $d(c(a), c(b)) = L(c)$ , so ist  $c$  eine Geodätische.

*Beweis.* Ist  $c : [a, b] \rightarrow M$  stückweise differenzierbare Kurve mit  $L(c) = d(c(a), c(b))$ , so gilt:

$$L(c[t_1, t_2]) = d(c(t_1), c(t_2))$$

für alle  $t_1 \leq t_2 \in [a, b]$ . Denn ist  $L(c[t_1, t_2]) > d(c(t_1), c(t_2))$ , so existiert eine kürzere stückweise differenzierbare Kurve  $\gamma : [t_1, t_2] \rightarrow M$ , die  $c(t_1)$  mit  $c(t_2)$  verbindet. Ist  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$

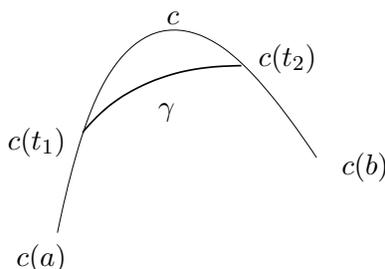


Abbildung 3.8:

die durch  $\gamma(t) = c(t)$  für  $t \in [a, t_1] \cup [t_2, b]$  definierte Fortsetzung von  $\gamma : [t_1, t_2] \rightarrow M$  so ist  $L(\gamma) < L(c)$  im Widerspruch zur Definition von  $d$  (siehe Abbildung 3.8). Daher ist  $c$  auch lokal distanzminimierend, und wegen Korollar 3.2.8 ist daher  $c$  eine Geodätische.  $\square$

**Bemerkung.** Ist  $c : [a, b] \rightarrow M$  eine Geodätische, so folgt im Allgemeinen nicht, dass  $c$  global distanzminimierend ist, d.h es gilt nicht  $L(c) = d(c(a), c(b))$ .

Sei zum Beispiel  $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  die Standardsphäre und  $c : \mathbb{R} \rightarrow S^{n-1}$  eine nach der

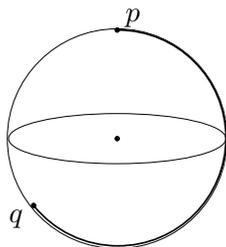


Abbildung 3.9:

Bogenlänge parametrisierte Geodätische. Dann ist  $c$  ein Großkreis mit  $\|\dot{c}(t)\| = 1$  und  $L(c[0, a]) > d(c(0), c(a))$ , falls  $a > \pi$  (siehe Abbildung 3.9)

### 3.3 Die Sätze von Hopf und Rinow

Nun wollen wir ein Kriterium angeben, welches die Existenz einer minimalen Verbindungsgeodätischen garantiert. Dazu benötigen wir folgendes Lemma.

**Lemma 3.3.1.** *Sei  $M$  eine zusammenhängende, Riemannsche Mannigfaltigkeit,  $\exp_p : B(0_p, \epsilon) \rightarrow \exp_p(B(0_p, \epsilon))$  ein Diffeomorphismus und  $0 < r < \epsilon$ . Dann existiert zu jedem  $q \notin \bar{B}(p, r)$  ein  $q' \in S(p, r)$  mit*

$$d(p, q) = d(p, q') + d(q', q)$$

*Beweis.* Sei  $q \notin \bar{B}(p, r)$ . Da  $x \rightarrow d(q, x)$  stetig ist (die durch  $d$  induzierte Topologie stimmt mit der auf  $M$  überein) und  $S(p, r)$  kompakt ist, existiert  $q' \in S(p, r)$  mit  $d(q', q) = \inf_{y \in S(p, r)} d(y, q)$ .

Sei  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  stückweise differenzierbare Kurve mit  $\gamma(0) = p$  und  $\gamma(a) = q$ . Dann

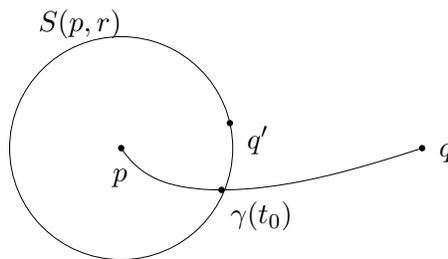


Abbildung 3.10:

existiert ein  $t_0 \in [0, a]$  mit  $\gamma(t_0) \in S(p, r)$ . Daher ist

$$L(\gamma[0, t_0]) \geq r = d(p, \gamma(t_0))$$

und

$$L(\gamma[t_0, a]) \geq d(\gamma(t_0), q) \geq d(q', q).$$

Also ist

$$d(p, q) \leq d(p, q') + d(q', q) = r + d(q', q) \leq L(\gamma[0, t_0]) + L(\gamma[t_0, a]) = L(\gamma).$$

Da  $d(p, q) = \inf\{L(\gamma) \mid \gamma(0) = p, \gamma(a) = q\}$ , folgt:  $d(p, q) = d(p, q') + d(q', q)$ .  $\square$

**Satz 3.3.2.** *(Hopf und Rinow (Teil 1))*

*Sei  $(M, g)$  eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, die einen Punkt  $p$  besitzt, so dass die Exponentialabbildung  $\exp_p$  auf ganz  $T_p M$  definiert ist. Dann existiert für alle  $q \in M$  eine minimale Geodätische  $c : [0, a] \rightarrow M$ , die  $p$  und  $q$  verbindet, d.h.  $c(0) = p$ ,  $c(a) = q$ , und  $L(c) = d(p, q)$ .*

**Bemerkung.** Ist also  $(M, g)$  geodätisch vollständig, so existiert zu je zwei Punkten eine minimale Geodätische. Diese ist im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt, wie das Beispiel der Sphäre mit der Standardmetrik zeigt.

*Beweis.* Sei  $d(p, q) = r$  und  $\epsilon > 0$ , so dass  $\exp_p : B(0_p, \epsilon) \rightarrow B(p, \epsilon)$  ein Diffeomorphismus ist. Ist  $r < \epsilon$ , so ist  $q \in B(p, \epsilon)$ , und der Beweis folgt aus Satz 3.2.7. Sei also  $\epsilon \leq r$  und  $0 < \delta < \epsilon$ . Dann ist  $q \notin \bar{B}(p, \delta)$ , und wegen Lemma 3.3.1 existiert ein  $q' \in S(p, \delta)$  mit  $d(p, q) = d(p, q') + d(q', q)$ . Sei  $v \in S(0_p, 1)$  der eindeutig bestimmte Vektor mit  $\exp_p(v\delta) = c_v(\delta) = q'$ . Da  $\exp_p$  auf ganz  $T_p M$  definiert ist, ist auch die Geodätische  $c_v$  auf ganz  $\mathbb{R}$

definiert. Wir zeigen nun, dass  $c_v : [0, r] \rightarrow M$  die Punkte  $p$  und  $q$  verbindet, und  $c_v(r) = q$  (siehe Abbildung 3.11). Sei

$$t_0 = \max\{t \in [0, r] \mid d(c_v(t), q) = r - t\}.$$

Da  $t \rightarrow d(c_v(t), q)$  stetig ist, folgt die Existenz dieses Maximums. Außerdem ist  $t_0 \geq \delta$ , denn

$$d(c_v(\delta), q) = d(q', q) = d(p, q) - d(p, q') = r - d(p, c_v(\delta)) = r - \delta$$

Aus der Definition von  $t_0$  und aus  $d(p, c_v(t_0)) \leq L(c_v[0, t_0]) = t_0$  folgt mit Hilfe der Dreiecks-

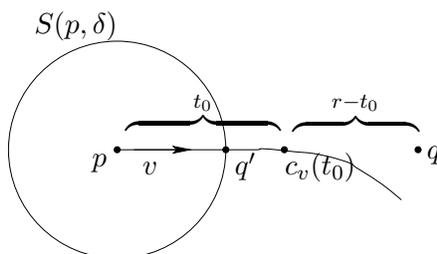


Abbildung 3.11:

ungleichung

$$r = d(p, q) \leq d(p, c_v(t_0)) + d(c_v(t_0), q) \leq t_0 + r - t_0 = r.$$

Dies impliziert

$$(1) d(p, q) = d(p, c_v(t_0)) + d(c_v(t_0), q) \text{ und } (2) d(p, c_v(t_0)) = t_0.$$

Angenommen, es gelte  $t_0 < r$ . Dann wähle ein  $\epsilon' > 0$ , so dass  $\exp_{c_v(t_0)} : B(0, \epsilon') \rightarrow B(c_v(t_0), \epsilon')$  ein Diffeomorphismus ist und  $q \notin B(c_v(t_0), \epsilon')$ . Wegen Lemma 3.3.1 existiert zu  $0 < \delta' < \epsilon'$  ein  $q'' \in S(c_v(t_0), \delta')$  mit

$$d(c_v(t_0), q) = d(c_v(t_0), q'') + d(q'', q).$$

Wir zeigen später:  $c_v(t_0 + \delta') = q''$  (siehe auch Abbildung 3.12).

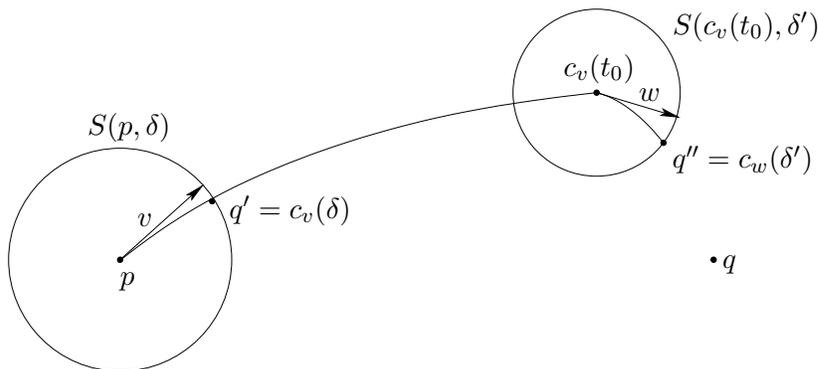


Abbildung 3.12:

Dann gilt:

$$d(c_v(t_0 + \delta'), q) = d(q'', q) = d(c_v(t_0), q) - d(c_v(t_0), q'') = r - t_0 - \delta' = r - (t_0 + \delta').$$

Dies steht aber im Widerspruch zur Definition von  $t_0$  und der Annahme  $t_0 < r$ . Also ist  $t_0 = r$ , und damit gilt  $c_v(t_0) = q$ .

Um die Aussage  $c_v(t_0 + \delta') = q''$  zu beweisen, betrachte  $w \in T_{c_v(t_0)}M$  mit  $\|w\| = 1$  und  $c_w(\delta') = q''$  (siehe Abbildung 3.12). Definiere die stückweise differenzierbare Kurve  $\gamma$  durch

$$\gamma(t) = \begin{cases} c_v(t) & \text{für } t \in [0, t_0] \\ c_w(t - t_0) & \text{für } t \in [t_0, t_0 + \delta'] \end{cases}$$

Wir zeigen:  $L(\gamma) = d(p, q'')$ . Dann ist wegen Korollar 3.2.9 die Kurve  $\gamma$  eine Geodätische mit  $\gamma(t) = c_v(t)$  für alle  $t \in [0, t_0 + \delta']$ .

Es gilt

$$\begin{aligned} d(p, q'') &\leq L(\gamma) = t_0 + \delta' = d(p, c_v(t_0)) + d(c_v(t_0), q'') \\ &= d(p, c_v(t_0)) + d(c_v(t_0), q) - d(q'', q) \\ &= d(p, q) - d(q'', q) \\ &\leq d(p, q'') \end{aligned}$$

und somit folgt die Behauptung. □

**Satz 3.3.3.** (Hopf und Rinow (Teil 2))

Sei  $(M, g)$  eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a)  $(M, g)$  ist geodätisch vollständig.
- (b) Für alle  $p \in M$  ist  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$  definiert.
- (c) Es existiert  $p \in M$ , so dass  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$  definiert ist.
- (d) Jede abgeschlossene und beschränkte Menge  $K \subset M$  ist kompakt.
- (e)  $(M, d)$  ist als metrischer Raum vollständig.

**Bemerkung.** In metrischen Räumen ist die Kompaktheit äquivalent zur Folgenkompaktheit, d.h. eine Teilmenge eines metrischen Raumes ist genau dann kompakt, wenn jede Folge eine konvergente Teilfolge besitzt.

*Beweis.* Die Implikationen (a)  $\Rightarrow$  (b)  $\Rightarrow$  (c) sind trivial.

(c)  $\Rightarrow$  (d):

Sei  $K \subset M$  abgeschlossen und beschränkt und sei  $p \in M$ , so dass  $\exp_p$  auf ganz  $T_p M$  definiert ist. Aus der Beschränktheit der Menge  $K$  folgt die Existenz von  $r > 0$  mit

$$K \subset \{q \in M \mid d(p, q) \leq r\} =: \bar{B}(p, r).$$

Wegen des Satzes von Hopf-Rinow (Teil 1) existiert für jedes  $q \in \bar{B}(p, r)$  ein  $v \in S(0_p, 1)$  und ein  $t \in [0, r]$  mit  $\exp_p(vt) = q$ . Also gilt:  $\exp_p(\bar{B}(0_p, r)) \supset \bar{B}(p, r)$ . Da

$$d(\exp_p(vr), p) \leq L(c_v[0, r]) = r$$

für alle  $v \in S(0_p, 1)$ , folgt  $\exp_p(\bar{B}(0_p, r)) \subset \bar{B}(p, r)$ , und wir erhalten  $\exp_p(\bar{B}(0_p, r)) = \bar{B}(p, r)$ . Insbesondere ist  $\bar{B}(p, r)$  als Bild der kompakten Menge  $\bar{B}(0_p, r) \subset T_p M$  unter einer stetigen Abbildung kompakt. Damit ist auch  $K$  als abgeschlossene Teilmenge von  $\bar{B}(p, r)$  kompakt.

(d)  $\Rightarrow$  (e):

Sei  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchyfolge. Daher existiert ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass  $d(p_{n_0}, p_n) \leq 1$  für alle  $n \geq n_0$ . Insbesondere ist  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt, und für  $p \in M$  existiert ein  $r > 0$  mit  $p_n \in \bar{B}(p, r)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Da  $\bar{B}(p, r)$  kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge  $p_{n_j} \rightarrow \tilde{p}$ . Da Cauchyfolgen genau dann konvergieren, falls sie eine konvergente Teilfolge besitzen, folgt die Behauptung.

(e)  $\Rightarrow$  (a):

Ist  $M$  nicht geodätisch vollständig, so existiert ein  $p \in M$  und ein  $v \in S(0_p, 1)$  und  $t_0 > 0$ , so dass  $c_v : [0, t_0) \rightarrow M$  sich nicht über  $t_0$  hinaus fortsetzen läßt. Sei  $0 \leq t_n < t_0$  eine monoton steigende Folge mit  $t_n \rightarrow t_0$ . Dann gilt für  $k \in \mathbb{N}$

$$d(c_v(t_n), c_v(t_{n+k})) \leq \int_{t_n}^{t_{n+k}} \|\dot{c}_v(s)\| ds = t_{n+k} - t_n$$

und somit ist  $c_v(t_n)$  Cauchyfolge. Nach Annahme existiert  $p' \in M$  mit  $c_v(t_n) \rightarrow p'$ . Aus Korollar 3.2.3 folgt die Existenz einer offenen Umgebung  $U$  von  $p'$  und eines  $\epsilon > 0$ , so dass  $\exp_q : B(0_q, \epsilon) \rightarrow B(q, \epsilon)$  ein Diffeomorphismus für alle  $q \in U$  ist. Wähle  $n \in \mathbb{N}$ , so dass  $c_v(t_n) \in U$  und  $t_0 - t_n < \epsilon/2$ . Da

$$\exp_{c_v(t_n)}(s \cdot \dot{c}_v(t_n)) = c_v(t_n + s)$$

für  $0 < s < \epsilon$  definiert ist und  $t_n + \epsilon/2 > t_0$ , läßt sich  $c_v$  im Widerspruch zur Annahme über  $t_0$  hinaus fortsetzen.  $\square$

**Definition 3.3.4.** Sei  $(M, g)$  zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, so heißt

$$\text{diam } M = \sup\{d(p, q) \mid p, q \in M\} \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$$

der *Durchmesser* von  $M$ .

**Korollar 3.3.5.** Sei  $(M, g)$  zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann sind äquivalent:

(a)  $M$  ist kompakt.

(b)  $M$  ist vollständig und  $\text{diam } M < \infty$ .

*Beweis.* (a)  $\Rightarrow$  (b)

Sei  $M$  kompakt. Da für  $p \in M$  die Funktion  $f(q) = d(q, p)$  stetig ist, ist  $f$  beschränkt. Daher existiert ein  $a > 0$  mit  $d(q, p) \leq a$  und somit ist jedes Punktepaar  $q_1, q_2 \in M$

$$d(q_1, q_2) \leq d(q_1, p) + d(p, q_2) \leq 2a.$$

Also ist der Durchmesser durch  $2a$  beschränkt. Kompakte metrische Räume sind automatisch vollständig. Denn ist  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge, so folgt aus der Kompaktheit die Existenz einer konvergenten Teilfolge. Also konvergiert die Cauchyfolge.

(b)  $\Rightarrow$  (a)

Sei  $M$  vollständig und  $\text{diam } M < \infty$ . Wegen  $\text{diam } M < \infty$  ist  $M$  beschränkt und abgeschlossen ( $M \setminus M = \emptyset$  ist offen). Aus der Vollständigkeit von  $M$  folgt dann mit Satz 3.3.3 die Kompaktheit von  $M$ .  $\square$



## Kapitel 4

# Krümmung Riemannscher Mannigfaltigkeiten

### 4.1 Der Krümmungstensor

Nun wollen wir uns mit einem weiteren wichtigen Begriff beschäftigen, nämlich mit dem der Krümmung.

Wie wir in der Vorlesung "Kurven und Flächen" gesehen haben, kann man die Krümmung alleine aus der Riemannschen Metrik berechnen (Theorema egregium). Damit ist die Krümmung eine Größe der inneren Geometrie.

Dies ist der Grund, weshalb wir diesen Begriff auf allgemeine Riemannsche Mannigfaltigkeiten ausdehnen können.

**Definition 4.1.1.** Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita-Zusammenhang  $\nabla$ , so heißt

$$R : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$$

mit

$$(X, Y, Z) \mapsto R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

der *Riemannsche Krümmungstensor*.

**Bemerkung.**  $R$  ist  $C^\infty(M)$  linear, und somit ist  $R$  ein Tensor vom Typ  $(1,3)$ .

Der Krümmungstensor besitzt folgende algebraischen Eigenschaften.

**Lemma 4.1.2.** Für alle  $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$  gilt:

(i) *Schiefsymmetrie in den ersten beiden Argumenten, d.h.*

$$R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z.$$

(ii) *1. Bianchi-Identität, d.h.*

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$$

(iii) *Der  $(1,1)$ -Tensor  $R(X, Y)$  ist schiefsymmetrisch, d.h.*

$$g(R(X, Y)Z, W) = -g(R(X, Y)W, Z)$$

(iv) *Invarianz unter blockweiser Vertauschung, d.h.*

$$g(R(X, Y)Z, W) = g(R(Z, W)X, Y).$$

*Beweis.* (i) folgt aus der Definition des Krümmungstensors und der Schiefsymmetrie der Lieklammer.

(ii) folgt aus der Torsionsfreiheit von  $\nabla$  und der Jacobi-Identität, denn

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \\ &\quad + \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_{[Y, Z]} X \\ &\quad + \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_{[Z, X]} Y \\ &= \nabla_X([Y, Z]) - \nabla_Y([X, Z]) - \nabla_Z[Y, X] \\ &\quad + \nabla_{[Y, X]} Z - \nabla_{[Y, Z]} X + \nabla_{[X, Z]} Y \\ &= [X, [Y, Z]] + [[X, Z], Y] + [[Y, X], Z] \\ &= [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] \\ &= 0. \end{aligned}$$

(iii) Für die Schiefsymmetrie genügt es zu zeigen:  $g(R(X, Y)Z, Z) = 0$ .

$$\begin{aligned} g(R(X, Y)Z, Z) &= g(\nabla_X \nabla_Y Z, Z) - g(\nabla_Y \nabla_X Z, Z) - g(\nabla_{[X, Y]} Z, Z) \\ &= Xg(\nabla_Y Z, Z) - g(\nabla_Y Z, \nabla_X Z) - Yg(\nabla_X Z, Z) \\ &\quad + g(\nabla_X Z, \nabla_Y Z) - \frac{1}{2}[X, Y]g(Z, Z) \\ &= \frac{1}{2}XYg(Z, Z) - \frac{1}{2}YXg(Z, Z) - \frac{1}{2}[X, Y]g(Z, Z) \\ &= \frac{1}{2}[X, Y](g(Z, Z)) - \frac{1}{2}[X, Y](g(Z, Z)) = 0 \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned} g(R(X, Y)Z, W) &\stackrel{(ii)}{=} -g(R(Y, Z)X, W) - g(R(Z, X)Y, W) \\ &\stackrel{(iii)}{=} g(R(Y, Z)W, X) + g(R(Z, X)W, Y) \\ &\stackrel{(ii)}{=} -g(R(Z, W)Y, X) - g(R(W, Y)Z, X) \\ &\quad - g(R(X, W)Z, Y) - g(R(W, Z)X, Y) \\ &\stackrel{(i)+(iii)}{=} 2g(R(Z, W)X, Y) + g(R(W, Y)X + R(X, W)Y, Z) \\ &\stackrel{(ii)}{=} 2g(R(Z, W)X, Y) + g(-R(Y, X)W, Z) \\ &\stackrel{(i)+(iii)}{=} 2g(R(Z, W)X, Y) - g(R(X, Y)Z, W) \end{aligned}$$

□

**Bemerkungen.** (a) Aus Lemma 4.1.2 (i) und (iii) folgt die Invarianz unter simultaner Vertauschung der ersten und zweiten sowie der dritten mit der vierten Komponente, d.h.

$$g(R(X, Y)Z, W) = g(R(Y, X)W, Z)$$

(b) Für jedes  $Y \in \Gamma(TM)$  ist der  $(1,1)$ -Tensor  $X \mapsto R(X, Y)Y$  symmetrisch, denn

$$g(R(X, Y)Y, Z) \stackrel{(a)}{=} g(R(Y, X)Z, Y) \stackrel{(iv)}{=} g(R(Z, Y)Y, X).$$

(c) Die kovariante Ableitung  $\nabla R$  des Krümmungstensors  $R$  ist der  $(1,4)$ -Tensor, gegeben durch

$$\nabla R(X, Y, Z, W) := \nabla_X R(Y, Z)W - R(\nabla_X Y, Z)W - R(Y, \nabla_X Z)W - R(Y, Z)\nabla_X W.$$

$\nabla R$  erfüllt die zweite Bianchi-Identität, d.h. es gilt unter zyklischer Vertauschung von  $X, Y, Z$

$$\nabla R(X, Y, Z, W) + \nabla R(Y, Z, X, W) + \nabla R(Z, X, Y, W) = 0.$$

Der Beweis sei als Übung überlassen.

## 4.2 Krümmungsgrößen

Die wichtigste Krümmungsgröße, die sich aus dem Krümmungstensor ergibt, ist die Schnittkrümmung.

**Definition 4.2.1.** (Schnittkrümmung)

Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit,  $p \in M$  und  $\sigma \subset T_p M$  ein 2-dimensionaler Unterraum. Sind  $v, w \in \sigma$  linear unabhängig, so heißt

$$K(\sigma) = K(v, w) := \frac{g(R(v, w)w, v)}{g(v, v)g(w, w) - g^2(v, w)}$$

die *Schnittkrümmung* von  $M$  bezüglich  $\sigma$ .

**Bemerkungen.** (a) Der Flächeninhalt des von  $v, w$  aufgespannten Parallelogramms ist definiert durch  $(g(v, v) \cdot g(w, w) - g^2(v, w))^{1/2}$ .

(b) Sind insbesondere  $v, w$  orthonormal, so gilt:

$$K(\sigma) = g(R(v, w)w, v)$$

(c) Betrachte zu einer gegebenen Riemannschen Metrik  $g_0$  und einer konstanten  $\lambda > 0$  die Reskalierung  $g = \lambda g_0$ . Dann stimmen die Levi-Civita-Zusammenhänge von  $g_0, g$  (siehe die Bemerkung nach dem Satz von Levi-Civita) und somit auch ihre Krümmungstensenoren  $R_{g_0}$  und  $R_g$  überein. Für die Schnittkrümmungen gilt daher:

$$K_g(\sigma) = \frac{1}{\lambda} K_{g_0}(\sigma).$$

**Lemma 4.2.2.**  $K(\sigma)$  ist wohldefiniert, d.h.  $K(\sigma)$  hängt nicht von der Wahl der Basis in  $\sigma$  ab.

*Beweis.* Sei  $\tilde{v} = \alpha v + \beta w$ ,  $\tilde{w} = \gamma v + \delta w$ . Aus der Schiefsymmetrie von  $g(R(x, y), z, w)$  in den beiden ersten und beiden letzten Argumenten folgt:

$$\begin{aligned} g(R(\tilde{v}, \tilde{w})\tilde{w}, \tilde{v}) &= g(R(\alpha v + \beta w, \gamma v + \delta w)\tilde{w}, \tilde{v}) \\ &= (\alpha\delta - \beta\gamma)g(R(v, w)\tilde{w}, \tilde{v}) \\ &= (\alpha\delta - \beta\gamma)g(R(v, w)(\gamma v + \delta w), \alpha v + \beta w) \\ &= (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 g(R(v, w)w, v). \end{aligned}$$

Setze

$$R_0(x, y)z := g(y, z)x - g(x, z)y,$$

so ist

$$g(R_0(x, y)z, w) = g(y, z)g(x, w) - g(x, z)g(y, w)$$

schiefsymmetrisch in den beiden ersten und beiden letzten Argumenten. Daher folgt aus derselben Rechnung wie oben:

$$g(R_0(\tilde{v}, \tilde{w})\tilde{w}, \tilde{v}) = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 g(R_0(v, w)w, v).$$

Wegen

$$g(R_0(v, w)w, v) = g(w, w)g(v, v) - g(v, w)^2$$

folgt, dass  $K(\sigma)$  wohldefiniert ist.

**Bemerkung.**  $(M, g)$  hat genau dann konstante Schnittkrümmung  $k$ , falls  $R = kR_0$  gilt. Die Details seien als Übung überlassen.

□

Aus dem Krümmungstensor läßt sich durch Spurbildung ein weiterer Tensor konstruieren.

**Definition 4.2.3.** Sei  $v, w \in T_p M$ , so definiere:

$$\text{Ric}(v, w) := \text{Ric}_p(v, w) = \text{tr}(z \mapsto R(z, v)w)$$

**Bemerkung.** (a) Ist  $\{e_1, \dots, e_n\}$  eine Orthonormalbasis von  $T_p M$ , so gilt:

$$\text{Ric}(v, w) = \sum_{i=1}^n g(R(e_i, v)w, e_i)$$

(b) Ric ist eine symmetrische 2-Form, denn aus Bemerkung (a) nach Lemma 4.1.2 und wegen Lemma 4.1.2( iv) folgt

$$g(R(e_i, v)w, e_i) = g(R(v, e_i)e_i, w) = g(R(e_i, w)v, e_i)$$

und somit

$$\text{Ric}(v, w) = \text{Ric}(w, v).$$

Also ist Ric ein symmetrischer  $(0, 2)$ -Tensor.

**Definition 4.2.4.** Ist  $v \in S_p M := S(0_p, 1)$  so heißt

$$\text{ric}(v) := \text{Ric}(v, v)$$

die *Ricci*krümmung in Richtung  $v$ . Ist  $SM = \bigcup_{p \in M} S_p M$ , so definiert  $\text{ric}$  eine Funktion auf  $SM$ .

**Bemerkungen.** (a) Sei  $\{v, e_1, \dots, e_{n-1}\}$  eine ON-Basis von  $T_p M$ , so gilt:

$$\text{ric}(v) = \sum_{i=1}^{n-1} g(R(e_i, v)v, e_i) = \sum_{i=1}^{n-1} K(e_i, v),$$

d.h. die Ricci

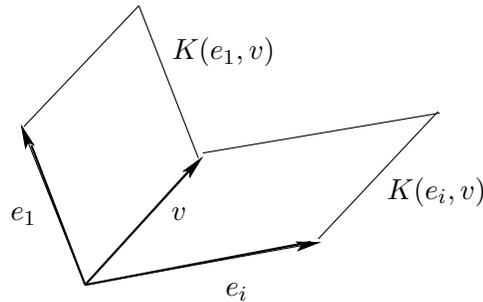
krümmung in Richtung  $v$  ist das Mittel über die Schnittkrümmungen aller Ebenen  $E_i$ , die von den Vektoren  $(e_i, v)$  aufgespannt werden.


Abbildung 4.1:

- (b) Ist die Schnittkrümmung konstant, d.h. existiert eine Konstante  $k \in \mathbb{R}$  mit  $K(\sigma) = k$  für alle Ebenen  $\sigma$ , so gilt  $\text{ric}(v) = (n-1)k$ . Dies impliziert für  $v \neq 0$

$$\text{Ric}(v, v) = \|v\|^2 \cdot \text{ric}\left(\frac{v}{\|v\|}\right) = g(v, v)(n-1)k,$$

und mittels Polarisation folgt  $\text{Ric}(v, w) = (n-1)kg(v, w)$ .

- (c) Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit heißt *Einsteinmannigfaltigkeit*, falls eine Konstante  $r \in \mathbb{R}$  existiert mit  $\text{ric}(v) = r$  für alle  $v \in SM$ . Dies ist wegen (b) äquivalent dazu, dass der Riccitenor proportional zur Riemannschen Metrik ist, d.h.

$$\text{Ric}(v, w) = rg(v, w)$$

Aus konstanter Ricci

krümmung folgt nicht die Konstanz der Schnittkrümmung, wie für  $n \geq 2$  das Beispiel des komplex projektiven Raumes  $\mathbb{C}P^n$  mit der Fubini-Study Metrik zeigt (Übungsaufgabe). Man kann sich fragen, ob jede Mannigfaltigkeit eine Einsteinmetrik zulässt. Für Mannigfaltigkeiten ab Dimension drei ist die Antwort nein. Hingegen besitzen Flächen immer eine Metrik mit konstanter Krümmung (Uniformisierungssatz). Für Flächen stimmen Riccikrümmung und Schnittkrümmung überein.

Bilden wir die Spur des Riccitors, so erhalten wir die Skalarkrümmung.

**Definition 4.2.5.** Sei  $\{e_i, \dots, e_n\}$  eine ON-Basis von  $T_p M$ . Dann heißt

$$S(p) = \operatorname{tr} \operatorname{Ric}_p = \sum_{i=1}^n \operatorname{Ric}(e_i, e_i)$$

die *Skalarkrümmung*.

**Bemerkung.** Offensichtlich gelten folgende Implikationen:

konstante Schnittkrümmung  $\Rightarrow$  konstante Riccikrümmung  $\Rightarrow$  konstante Skalarkrümmung

**Lemma 4.2.6.** (*Lemma von Schur*)

Sei  $\dim M \geq 3$ .

(a) Hängt die Schnittkrümmung nur von  $p \in M$  ab, d.h. existiert eine Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$K(\sigma) = f(p)$$

für alle Ebenen  $\sigma \subset T_p M$ , so ist Schnittkrümmung konstant.

(b) Hängt die Riccikrümmung nur von  $p \in M$  ab, d.h. existiert eine Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\operatorname{ric}(v) = f(p)$$

für alle Vektoren  $v \in S_p M$ , so ist die Riccikrümmung konstant.

*Beweis.* Die Aussage (b) impliziert die Aussage (a), denn ist  $K(\sigma) = f(p)$  für alle Ebenen  $\sigma \subset T_p M$ , so ist  $\operatorname{ric}(v) = (n-1)f(p)$ . Aus (b) folgt daher die Konstanz von  $f$ .

Der Beweis von (b) sei als Übung überlassen.  $\square$

### 4.3 Geodätische und die Variationsformeln

Wir werden in diesem Abschnitt sehen, wie die Krümmung auf das Verhalten von Geodätischen einwirkt, wie z.B. bei positiver Krümmung, wo die Geodätischen nach endlicher Zeit aufhören, Kürzeste zu sein. Um diese Zusammenhänge herzuleiten, brauchen wir die erste und zweite Variationsformel.

**Definition 4.3.1.** Sei  $c : [0, a] \rightarrow M$  eine differenzierbare Kurve und  $\epsilon > 0$ . Eine differenzierbare Abbildung  $\alpha : (-\epsilon, +\epsilon) \times [0, a] \rightarrow M$  mit  $(s, t) \mapsto \alpha(s, t) = \alpha_s(t)$  heißt (*differenzierbare Variation*) von  $c$ , falls  $\alpha(0, t) = c(t)$ .

Eine Variation heißt *eigentlich (Variation mit festen Endpunkten)*, falls  $\alpha(s, 0) = c(0)$  und  $\alpha(s, a) = c(a)$ .

**Bemerkung.** Wir werden hauptsächlich differenzierbare Variationen betrachten. Manchmal benötigt man auch stückweise differenzierbare Variationen. Eine stetige Abbildung  $\alpha : (-\epsilon, +\epsilon) \times [0, a] \rightarrow M$  heißt *stückweise differenzierbare Variation*, falls eine Unterteilung

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = a$$

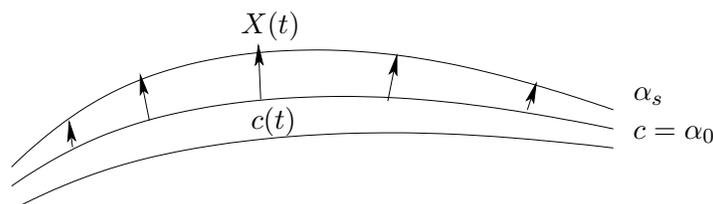


Abbildung 4.2: Variation

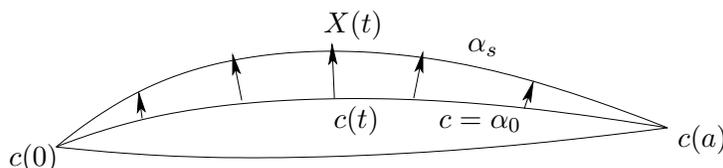


Abbildung 4.3: eigentliche Variation

existiert, so dass  $\alpha : (-\epsilon, +\epsilon) \times [t_{i-1}, t_i] \rightarrow M$  für alle  $i \in \{1, \dots, k\}$  differenzierbar ist, d.h.  $\alpha : (-\epsilon, +\epsilon) \times [t_{i-1}, t_i] \rightarrow M$  besitzt eine differenzierbare Fortsetzung auf eine offene Menge des  $\mathbb{R}^2$ .

**Definition 4.3.2.** Sei  $\alpha$  eine Variation von  $c$ , so heißt

$$X(t) := \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} \alpha(s, t)$$

das zu  $\alpha$  gehörige *Variationsvektorfeld*.

**Bemerkung.** Auch wenn  $\alpha$  nur stückweise differenzierbar ist, ist  $X(t)$  für alle  $t$  definiert. Aus der stückweisen Differenzierbarkeit von  $\alpha$  folgt

$$\lim_{t \rightarrow t_i} X(t) = \lim_{\substack{t < t_i \\ t \rightarrow t_i}} X(t) = X(t_i),$$

und somit ist  $X(t)$  auch stetig.

**Lemma 4.3.3.** Sei  $c : [0, a] \rightarrow M$  eine stetige stückweise differenzierbare Kurve und  $X$  ein stetiges stückweise differenzierbares Vektorfeld längs  $c$ . Dann existiert eine stückweise differenzierbare Variation  $\alpha$  mit Variationsvektorfeld  $X$ .

*Beweis.* Da  $c[0, a] \subset M$  kompakt ist, existiert ein  $\delta > 0$ , so dass  $\exp_{c(t)}(v)$  für alle  $t \in [0, a]$  und  $v \in T_{c(t)}M$  mit  $\|v\| < \delta$  definiert ist. Da  $X(t)$  beschränkt ist, gibt es ein  $\epsilon > 0$ , so dass  $\|X(t) \cdot s\| < \delta$  für alle  $s \in (-\epsilon, +\epsilon)$  gilt. Definiere  $\alpha : (-\epsilon, +\epsilon) \times [0, a] \rightarrow M$  durch

$$\alpha(s, t) = \exp_{c(t)}(sX(t)) = c_{X(t)}(s).$$

Dann gilt:  $\left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} \alpha(s, t) = X(t)$ . □

Sei nun  $\alpha : (-\epsilon, +\epsilon) \times [0, a] \rightarrow M$  stückweise differenzierbare Variation einer Kurve  $c : [0, a] \rightarrow M$ . Setze

$$L(s) = L(\alpha_s) = \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot{\alpha}_s(t)\| dt$$

und

$$E(s) = E(\alpha_s) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot{\alpha}_s(t)\|^2 dt,$$

falls  $\alpha$  auf  $(-\epsilon, \epsilon) \times [t_{i-1}, t_i]$  für  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = a$  differenzierbar ist. Nun wollen wir Formeln für die 1. und 2. Ableitung von  $L(s)$  und  $E(s)$  herleiten. Wir werden uns dabei auf differenzierbare Variationen einschränken. Für die Riemannsche Metrik  $g$  nutzen wir das Symbol  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

**Satz 4.3.4.** (1. Variationsformeln)

Sei  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, a] \rightarrow M$  eine differenzierbare Variation einer Kurve  $c$  mit Variationsvektorfeld  $X$ . Dann gilt:

$$(a) \quad E'(0) = - \int_0^a \left\langle X(t), \frac{D}{dt} \dot{c}(t) \right\rangle dt + \langle X(a), \dot{c}(a) \rangle - \langle X(0), \dot{c}(0) \rangle$$

(b) Ist  $c : [0, a] \rightarrow M$  regulär, d.h.  $\dot{c}(t) \neq 0$  für alle  $t \in [0, a]$ , so gilt:

$$L'(0) = - \int_0^a \frac{\left\langle X(t), \frac{D}{dt} \dot{c}(t) \right\rangle}{\|\dot{c}(t)\|} dt + \int_0^a \frac{\frac{d}{dt} \langle X(t), \dot{c}(t) \rangle}{\|\dot{c}(t)\|} dt$$

**Bemerkungen.** (a) Ist  $\alpha : (-\epsilon, +\epsilon) \times [0, a] \rightarrow M$  eine stückweise differenzierbare Variation bezüglich einer Unterteilung  $t_0 = 0 < t_1 \dots < t_k$ , so folgt:

$$E'(0) = \sum_{i=1}^k \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} E(\alpha_s|_{[t_{i-1}, t_i]}).$$

Entsprechendes gilt für  $L'(0)$ .

(b) Ist  $\alpha$  eigentliche Variation oder ist  $X(0) \perp \dot{c}(0)$  und  $X(a) \perp \dot{c}(a)$ , so ist

$$E'(0) = - \int_0^a \left\langle X(t), \frac{D}{dt} \dot{c}(t) \right\rangle dt$$

(c) Ist  $\|\dot{c}(t)\| = l > 0$ , so gilt:

$$L'(0) = \frac{1}{l} E'(0).$$

*Beweis.* (a) Da der Levi-Civita-Zusammenhang Riemannsch ist, und wegen des Symmetriemmas 3.2.5 erhalten wir

$$\begin{aligned}
 E'(s) &= \frac{1}{2} \int_0^a \frac{\partial}{\partial s} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \alpha_s, \frac{\partial}{\partial t} \alpha_s \right\rangle dt = \int_0^a \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} \alpha_s, \frac{\partial}{\partial t} \alpha_s \right\rangle dt = \int_0^a \left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} \alpha_s, \frac{\partial}{\partial t} \alpha_s \right\rangle dt \\
 &= \int_0^a \left( \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial}{\partial s} \alpha_s, \frac{\partial}{\partial t} \alpha_s \right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial s} \alpha_s, \frac{D}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \alpha_s \right\rangle \right) dt \\
 &= \left\langle \frac{\partial}{\partial s} \alpha_s, \frac{\partial}{\partial t} \alpha_s \right\rangle \Big|_{t=0}^{t=a} - \int_0^a \left\langle \frac{\partial}{\partial s} \alpha_s, \frac{D}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \alpha_s \right\rangle dt.
 \end{aligned}$$

Auswertung an der Stelle  $s = 0$  ergibt:

$$E'(0) = \langle X(a), \dot{c}(a) \rangle - \langle X(0), \dot{c}(0) \rangle - \int_0^a \left\langle X(t), \frac{D}{dt} \dot{c}(t) \right\rangle dt$$

(b)

$$\begin{aligned}
 L'(s) &= \int_0^a \frac{\partial}{\partial s} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \alpha_s(t), \frac{\partial}{\partial t} \alpha_s(t) \right\rangle^{1/2} dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^a \frac{1}{\left\langle \frac{\partial}{\partial t} \alpha_s(t), \frac{\partial}{\partial t} \alpha_s(t) \right\rangle^{1/2}} \cdot 2 \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} \alpha_s(t), \frac{\partial}{\partial t} \alpha_s(t) \right\rangle dt \\
 &= \int_0^a \frac{\frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial}{\partial s} \alpha_s, \frac{\partial}{\partial t} \alpha_s \right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial s} \alpha_s, \frac{D}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \alpha_s \right\rangle}{\left\langle \frac{\partial}{\partial t} \alpha_s(t), \frac{\partial}{\partial t} \alpha_s(t) \right\rangle^{1/2}} dt
 \end{aligned}$$

Für  $s = 0$  ergibt sich:

$$L'(0) = - \int_0^a \frac{\langle X(t), \frac{D}{dt} \dot{c}(t) \rangle dt}{\|\dot{c}(t)\|} + \int_0^a \frac{\frac{d}{dt} \langle X(t), \dot{c}(t) \rangle}{\|\dot{c}(t)\|} dt$$

Aus diesen Formeln erhält man eine weitere Charakterisierung der Geodätischen, nämlich als kritische Punkte des Energie- bzw. Längenfunktionals.  $\square$

**Korollar 4.3.5.** (*Charakterisierung von Geodätischen*)

- (a) Eine differenzierbare Kurve  $c : [0, a] \rightarrow M$  ist genau dann eine Geodätische, falls  $E'(0) = 0$  für alle eigentlichen Variationen gilt.
- (b) Eine differenzierbare Kurve  $c : [0, a] \rightarrow M$  mit  $\|\dot{c}(t)\| = \text{const.} > 0$  ist genau dann eine Geodätische, falls  $L'(0) = 0$  für alle eigentlichen Variationen gilt.

*Beweis.* (a) Falls  $\alpha : (-\epsilon, +\epsilon) \times [0, a] \rightarrow M$  eigentliche Variation ist, gilt:

$$E'(0) = - \int_0^a \left\langle X(t), \frac{D}{dt} \dot{c}(t) \right\rangle dt$$

wobei  $X(t) = \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \alpha_s(t)$  das zu  $\alpha$  gehörende Variationsvektorfeld bezeichnet. Insbesondere ist  $E'(0) = 0$ , falls  $c$  Geodätische ist.

Sei umgekehrt  $E'(0) = 0$  für alle eigentlichen Variationen  $\alpha$ . Betrachte das Vektorfeld  $X(t) = \varphi(t) \frac{D}{dt} \dot{c}(t)$ , wobei  $\varphi : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion mit  $\varphi(0) = \varphi(a) = 0$  darstellt. Wegen Lemma 4.3.3 existiert eine differenzierbare, eigentliche Variation  $\alpha : (-\epsilon, +\epsilon) \times [0, a] \rightarrow M$  mit  $\frac{\partial}{\partial s} \alpha_s = X(t)$ . Also gilt

$$0 = E'(0) = - \int_0^a \varphi(t) \left\langle \frac{D}{dt} \dot{c}(t), \frac{D}{dt} \dot{c}(t) \right\rangle dt$$

für alle differenzierbaren Funktionen  $\varphi : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\varphi(0) = \varphi(a) = 0$ . Wäre  $\frac{D}{dt} \dot{c}(t_0) \neq 0$ , so gäbe es eine Umgebung  $I_{t_0} = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$  von  $t_0$  mit  $\frac{D}{dt} \dot{c}(t) \neq 0$  für alle  $t \in I_{t_0}$ . Dann wähle  $\varphi : [0, a] \rightarrow [0, \infty)$ , so dass  $\varphi(t) > 0$  für  $t \in (t_0 - \delta/2, t_0 + \delta/2)$  und  $\varphi(t) = 0$  für  $t \notin I_{t_0}$ . Dann wäre aber  $E'(0) < 0$ .

(b) Ist  $\|\dot{c}(t)\| = \text{const} = \ell > 0$ , so folgt aus Bemerkung (c):  $\frac{1}{\ell} E'(0) = L'(0)$  und die Behauptung folgt aus (a). □

Nun wollen wir die zweiten Ableitungen an den kritischen Punkten des Energie- bzw. Längenfunktionals, also an den Geodätischen berechnen. Dabei wird der Krümmungstensor eine fundamentale Rolle spielen. Von besonderer Bedeutung ist dabei das folgende Lemma.

**Lemma 4.3.6.** *Sei  $V \subset \mathbb{R}^2$  und  $\alpha : V \rightarrow M$  eine differenzierbare Abbildung mit  $(s, t) \mapsto \alpha(s, t)$ . Sei  $Z : V \rightarrow TM$  ein Vektorfeld längs  $\alpha$ , d.h.  $Z(s, t) \in T_{\alpha(s, t)} M$ . Dann gilt:*

$$\frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} Z(s, t) - \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} Z(s, t) = R \left( \frac{\partial \alpha}{\partial s}(s, t), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(s, t) \right) Z(s, t).$$

*Beweis.* Der Beweis ist eine direkte Konsequenz aus der Definition des Krümmungstensors, falls die Vektorfelder  $Z, \frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{\partial \alpha}{\partial t}$  sich für jedes  $(s, t) \in V$  in eine offene Umgebung  $U \subset M$  von  $\alpha(s, t)$  fortsetzen lassen, d.h. falls  $\tilde{Z}, X, Y \in \Gamma(TU)$  existieren mit

$$\tilde{Z}(\alpha(s, t)) = Z(s, t), \quad X(\alpha(s, t)) = \frac{\partial \alpha}{\partial s}(s, t), \quad Y(\alpha(s, t)) = \frac{\partial \alpha}{\partial t}(s, t)$$

für alle  $(s, t) \in \alpha^{-1}(U)$ . Dann gilt:

$$\frac{D}{\partial t} Z(s, t) = (\nabla_{\frac{\partial \alpha}{\partial t}} \tilde{Z})(\alpha(s, t)) = (\nabla_Y \tilde{Z})(\alpha(s, t)) \quad \text{sowie} \quad \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} Z(s, t) = (\nabla_X \nabla_Y \tilde{Z})(\alpha(s, t))$$

als auch

$$\frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} Z(s, t) = (\nabla_Y \nabla_X \tilde{Z})(\alpha(s, t)).$$

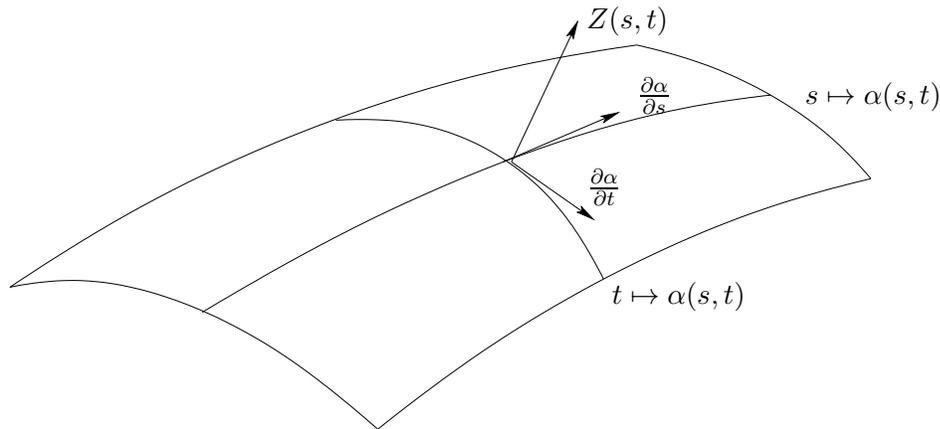


Abbildung 4.4:

Dies impliziert:

$$\frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} Z(s, t) - \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} Z(s, t) = \nabla_X \nabla_Y \tilde{Z}(\alpha(s, t)) - \nabla_Y \nabla_X \tilde{Z}(\alpha(s, t)).$$

Mittels der Torsionsfreiheit des Zusammenhangs und des Symmetriemmas erhalten wir:

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X = \nabla_{\frac{\partial \alpha}{\partial s}} Y - \nabla_{\frac{\partial \alpha}{\partial t}} X = \frac{D}{\partial s} \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial s} = 0$$

Daraus folgt:

$$\frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} Z(s, t) - \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} Z(s, t) = (R(X, Y)\tilde{Z})(\alpha(s, t)) = R\left(\frac{\partial \alpha}{\partial s}(s, t), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(s, t)\right) Z(s, t).$$

Lassen sich die betrachteten Vektorfelder nicht lokal fortsetzen, so wähle eine Karte  $(x, U)$ , so dass  $\alpha(s, t) \in U$  für alle  $(s, t)$  in einer Umgebung  $V' \subset V$  gilt. Ist  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = x \circ \alpha$ , so erhalten wir:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s}(s, t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial s} \alpha_i(s, t) \frac{\partial}{\partial x_i} \circ \alpha(s, t)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t}(s, t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial t} \alpha_j(s, t) \frac{\partial}{\partial x_j} \circ \alpha(s, t)$$

und

$$Z(s, t) = \sum_{k=1}^n z_k(s, t) \frac{\partial}{\partial x_k} \circ \alpha(s, t).$$

Eine etwas längere aber einfache Rechnung führt auch in diesem Falle zum gewünschten Ergebnis.  $\square$

**Satz 4.3.7.** (2. Variationsformeln)

Sei  $\alpha : (-\epsilon, +\epsilon) \times [0, a] \rightarrow M$  eine differenzierbare Variation der Geodätischen  $c : [0, a] \rightarrow M$  mit Variationsvektorfeld  $X$ . Dann gilt:

(a)

$$E''(0) = \int_0^a \left\langle \frac{D}{dt} X(t), \frac{D}{dt} X(t) \right\rangle - \langle R(X(t), \dot{c}(t)) \dot{c}(t), X(t) \rangle dt$$

$$+ \left\langle \frac{D}{\partial s} \Big|_{s=0} \frac{\partial \alpha}{\partial s}(s, a), \dot{c}(a) \right\rangle - \left\langle \frac{D}{\partial s} \Big|_{s=0} \frac{\partial \alpha}{\partial s}(s, 0), \dot{c}(0) \right\rangle$$

(b) Ist zusätzlich  $\|\dot{c}(t)\| = 1$  und  $X^\perp(t) = X(t) - \langle \dot{c}(t), X(t) \rangle \dot{c}(t)$  die zu  $\dot{c}$  orthogonale Komponente von  $X$ , so gilt:

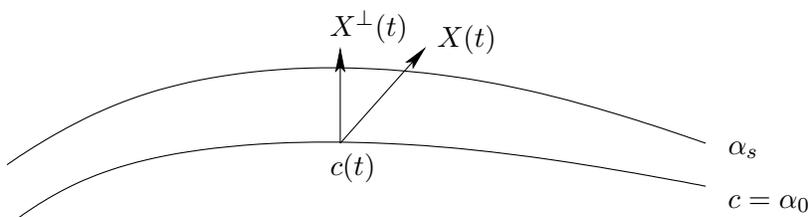


Abbildung 4.5:

$$L''(0) = \int_0^a \left\langle \frac{D}{dt} X^\perp(t), \frac{D}{dt} X^\perp(t) \right\rangle - \langle R(X^\perp(t), \dot{c}(t)) \dot{c}(t), X^\perp(t) \rangle dt$$

$$+ \left\langle \frac{D}{\partial s} \Big|_{s=0} \frac{\partial \alpha}{\partial s}(s, a), \dot{c}(a) \right\rangle - \left\langle \frac{D}{\partial s} \Big|_{s=0} \frac{\partial \alpha}{\partial s}(s, 0), \dot{c}(0) \right\rangle$$

*Beweis.* (a) Wie im Beweis von Satz 4.3.4 erhalten wir

$$E'(s) = \frac{1}{2} \int_0^a \frac{\partial}{\partial s} \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle dt = \int_0^a \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} \alpha, \frac{\partial}{\partial t} \alpha \right\rangle dt = \int_0^a \left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} \alpha, \frac{\partial}{\partial t} \alpha \right\rangle dt. \quad (4.1)$$

Daraus folgt:

$$E''(s) = \int_0^a \frac{\partial}{\partial s} \left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle dt$$

$$= \int_0^a \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{D}{\partial s} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle dt$$

Da wegen Lemma 4.3.6

$$\frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial s} - \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} \frac{\partial \alpha}{\partial s} = R \left( \frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial s} = -R \left( \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial s},$$

folgt:

$$\begin{aligned} E''(s) &= - \int_0^a \left\langle R \left( \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle dt \\ &\quad + \int_0^a \left\langle \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} \frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{D}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{D}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right\rangle dt \end{aligned}$$

Für  $s = 0$  erhalten wir:

$$\begin{aligned} E''(0) &= \int_0^a \left\langle \frac{D}{dt} X(t), \frac{D}{dt} X(t) \right\rangle - \langle R(\dot{c}(t), X(t)) X(t), \dot{c}(t) \rangle dt \\ &\quad + \int_0^a \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{D}{ds} \Big|_{s=0} \frac{\partial \alpha}{\partial s}, \dot{c}(t) \right\rangle dt \end{aligned}$$

(b) Aus dem Beweis der 1. Variationsformel (Satz 4.3.4) folgt:

$$L'(s) = \int_0^a \frac{\left\langle \frac{D}{ds} \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle}{\left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle^{1/2}} dt$$

Daher gilt:

$$\begin{aligned} L''(s) &= \int_0^a -1/2 \frac{1}{\left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle^{3/2}} \cdot 2 \left\langle \frac{D}{ds} \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle^2 dt \\ &\quad + \int_0^a \frac{1}{\left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle^{1/2}} \frac{\partial}{\partial s} \left\langle \frac{D}{ds} \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle dt \end{aligned}$$

Da  $\frac{\partial \alpha}{\partial t}(t, 0) = \dot{c}(t)$  und  $\|\dot{c}(t)\| = 1$ , folgt für  $s = 0$  mit Hilfe von (4.1)

$$\begin{aligned} L''(0) &= - \int_0^a \left\langle \frac{D}{dt} X(t), \dot{c}(t) \right\rangle^2 dt + \int_0^a \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \left\langle \frac{D}{ds} \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle dt \\ &= - \int_0^a \left\langle \frac{D}{dt} X(t), \dot{c}(t) \right\rangle^2 dt + E''(0) \end{aligned}$$

Also erhalten wir mit Teil (a):

$$\begin{aligned} L''(0) &= - \int_0^a \left\langle \frac{D}{dt} X(t), \dot{c}(t) \right\rangle^2 dt \\ &\quad + \int_0^a \left\langle \frac{D}{dt} X(t), \frac{D}{dt} X(t) \right\rangle - \langle R(X(t), \dot{c}(t)) \dot{c}(t), X(t) \rangle dt \\ &\quad + \left\langle \frac{D}{ds} \Big|_{s=0} \frac{\partial \alpha}{\partial s}(s, a), \dot{c}(a) \right\rangle - \left\langle \frac{D}{ds} \Big|_{s=0} \frac{\partial \alpha}{\partial s}(s, 0), \dot{c}(0) \right\rangle \end{aligned}$$

Da  $X^\perp = X - \langle \dot{c}, X \rangle \dot{c}$  folgt:

$$\frac{D}{dt} X^\perp = \frac{D}{dt} X - \left\langle \dot{c}, \frac{D}{dt} X \right\rangle \dot{c} = \left( \frac{D}{dt} X \right)^\perp$$

und somit

$$\left\langle \frac{D}{dt} X, \frac{D}{dt} X \right\rangle = \left\langle \frac{D}{dt} X^\perp, \frac{D}{dt} X^\perp \right\rangle + \left\langle \dot{c}, \frac{D}{dt} X \right\rangle^2$$

Da  $\langle R(X, \dot{c})\dot{c}, X \rangle = \langle R(X^\perp, \dot{c})\dot{c}, X^\perp \rangle$  folgt die Behauptung.  $\square$

**Bemerkungen.** (a) Ist die Variation eigentlich, so ist  $\frac{\partial \alpha}{\partial s}(s, a) = \frac{\partial \alpha}{\partial s}(s, 0) = 0$  und die Randterme fallen weg. Insbesondere hängt  $L''(0)$  und  $E''(0)$  nun vom Vektorfeld  $X$  ab.

(b) Wählen wir zu einem beliebigen differenzierbaren Vektorfeld  $X$  die kanonische Variation  $\alpha(s, t) = \exp_{c(t)}(sX(t))$ , so gilt  $\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} \alpha(s, t) = 0$  und die Randterme fallen ebenfalls weg.

(c) Da  $\|\frac{D}{dt} X\|^2 \geq \|\frac{D}{dt} X^\perp\|^2$ , ist  $L''(0) \leq E''(0)$ .

(d) Ist  $\alpha$  stückweise differenzierbar, so gilt

$$E''(0) = \sum_{i=1}^k \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} E(\alpha_s[t_{i-1}, t_i])$$

für eine Unterteilung  $0 = t_0 < \dots < t_k = a$

(e)  $\langle R(X^\perp, \dot{c})\dot{c}, X^\perp \rangle = K(\dot{c}, X^\perp) \|X^\perp\|^2$ , falls  $\|\dot{c}(t)\| = 1$ .

(f) Ist  $X(t) \perp \dot{c}(t)$  paralleles Vektorfeld längs  $c$  mit  $\|X(0)\| = 1$  und  $\alpha(s, t) = \exp_{c(t)}(sX(t))$  die zu  $X$  gehörige kanonische Variation, so folgt  $L''(0) = -\int_0^a K(\dot{c}, X) dt$ .

## 4.4 Die Sätze von Bonnet-Myers und Synge

Nun wollen wir uns mit wichtigen Anwendungen der 2. Variationsformel beschäftigen. Zunächst widmen wir uns dem folgenden fundamentalen Satz von Bonnet und Myers.

**Satz 4.4.1.** (Bonnet-Myers, 1935)

Sei  $(M, g)$  eine vollständige  $n$ -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit und

$$\text{ric} \geq \frac{n-1}{r^2}.$$

Dann gilt:

$$\text{diam } M \leq \pi r.$$

Insbesondere ist  $M$  kompakt.

**Bemerkung.** Ist  $S^n(r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$  die Sphäre von Radius  $r$  um  $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Dann ist

$$\text{diam } S^n(r) = \pi \cdot r \text{ und } \text{ric} = \frac{n-1}{r^2}$$

Dieses Beispiel zeigt, dass der Satz von Bonnet-Myers optimal ist, d.h. unter der vorgegebenen Schranke an die Ricci-Krümmung kann die Durchmesserabschätzung nicht verbessert werden.

*Beweis.* Aus der Vollständigkeit von  $M$  folgt mit den Sätzen 3.3.2, 3.3.3 von Hopf-Rinow für alle  $p, q \in M$  die Existenz einer minimalen Geodätischen  $c$ , die  $p$  mit  $q$  verbindet. Somit gilt  $L(c) = d(p, q)$ . Daher ist der Satz von Bonnet-Myers bewiesen, wenn folgende Aussage gezeigt ist: Ist  $c : [0, \ell] \rightarrow M$  eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische mit  $\ell = L(c) > \pi r$ , so ist  $c$  nicht minimal. Insbesondere ist dann der Abstand zweier beliebiger Punkte nicht größer als  $\pi r$ .

Sei also  $L(c) > \pi r$ . Wir konstruieren eine eigentliche Variation  $\alpha_s(t)$  von  $c = \alpha_0$  mit

$$L''(0) = \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} L(\alpha_s) < 0.$$

Wegen der zweiten Variationsformel genügt es ein Vektorfeld  $X : [0, \ell] \rightarrow TM$  längs  $c$  zu finden mit  $X(t) \perp \dot{c}(t)$  und  $X(0) = X(\ell) = 0$ , so dass

$$\int_0^\ell \left( \left\| \frac{D}{dt} X(t) \right\|^2 - \langle R(X(t), \dot{c}) \dot{c}, X(t) \rangle \right) dt < 0.$$

Sei  $e_1, \dots, e_n \in T_{c(0)}M$  eine ON-Basis mit  $e_n = \dot{c}(0)$  und  $E_i(t)$  ihre parallelen Fortsetzungen längs  $c$ . Dann ist  $E_1(t), \dots, E_n(t) \in T_{c(t)}M$  eine ON-Basis mit  $E_n(t) = \dot{c}(t)$ . Definiere für  $i \in \{1, \dots, n\}$

$$X_i(t) := \sin\left(\frac{\pi}{\ell}t\right)E_i(t),$$

so ist  $X_i(0) = X_i(\ell) = 0$  und  $\frac{D}{dt}X_i(t) = \frac{\pi}{\ell} \cos\left(\frac{\pi}{\ell}t\right)E_i(t)$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^\ell \left( \left\| \frac{D}{dt} X_i(t) \right\|^2 - \langle R(X_i(t), \dot{c}(t)) \dot{c}(t), X_i(t) \rangle \right) dt \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^\ell \left( \frac{\pi^2}{\ell^2} \cos^2\left(\frac{\pi}{\ell}t\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{\ell}t\right) K(E_i(t), \dot{c}(t)) \right) dt \\ &= \int_0^\ell \left( (n-1) \frac{\pi^2}{\ell^2} \cos^2\left(\frac{\pi}{\ell}t\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{\ell}t\right) \text{ric}(\dot{c}(t)) \right) dt \end{aligned}$$

Da  $\ell > \pi r$ , folgt:

$$\text{ric} \geq \frac{n-1}{r^2} > \frac{\pi^2}{\ell^2} (n-1).$$

Damit erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{n-1} \int_0^\ell \left( \left\| \frac{D}{dt} X_i(t) \right\|^2 - \langle R(X_i(t), \dot{c}(t)) \dot{c}(t), X_i(t) \rangle \right) dt < (n-1) \frac{\pi^2}{\ell^2} \int_0^\ell \left( \cos^2\left(\frac{\pi}{\ell}t\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{\ell}t\right) \right) dt = 0,$$

denn

$$\int_0^\ell \left( \cos^2\left(\frac{\pi}{\ell}t\right) \right) dt = \frac{l}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{\ell}t\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{\ell}t\right) \Big|_0^\ell + \int_0^\ell \left( \sin^2\left(\frac{\pi}{\ell}t\right) \right) dt$$

Also gilt:

$$\int_0^\ell \left( \left\| \frac{D}{dt} X_i(t) \right\|^2 - \langle R(X_i(t), \dot{c}(t)), \dot{c}(t), X_i(t) \rangle \right) dt < 0$$

für wenigstens ein  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ .  $\square$

Für den Satz von Synge (auch manchmal Lemma von Synge genannt) benötigen wir den Begriff der orientierbaren Mannigfaltigkeit.

**Definition 4.4.2.** Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit mit einem Atlas  $\mathcal{A} = \{(x_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ . Der Atlas heißt *orientiert*, falls die Koordinatenwechsel positive Determinate haben, d.h. falls für alle Koordinatenwechsel

$$x_\beta \circ x_\alpha^{-1} : x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

und alle  $p \in U_\alpha \cap U_\beta$  die Determinante  $\det(D(x_\beta \circ x_\alpha^{-1})(x_\alpha(p)))$  positiv ist.

Eine Mannigfaltigkeit heißt *orientierbar*, falls sie einen orientierten Atlas besitzt.

**Bemerkungen.** (1) Hat man einen orientierten Atlas  $\mathcal{A}$ , so läßt sich erklären, was eine positiv orientierte Basis des Tangentialraumes  $T_p M$  ist. Ist  $(x, U) \in \mathcal{A}$  Karte und  $p \in U$ , so heißt eine Basis  $v_1, \dots, v_n \in T_p M$  *positiv orientiert*, falls  $v_1, \dots, v_n$  und  $\frac{\partial}{\partial x_1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}|_p$  *gleichorientiert* sind, d.h. die Matrix des Basiswechsels hat positive Determinante. Andernfalls heißt sie *negativ orientiert*. Ist der Atlas orientiert, so ist diese Definition unabhängig von der Wahl der Karte und teilt die Basen in zwei Klassen ein, nämlich die positiv und negativ orientierten Basen.

(2) Eine lineare invertierbare Abbildung  $L : T_p M \rightarrow T_q M$  heißt *orientierungserhaltend*, falls die Basis  $L(\frac{\partial}{\partial x_1}|_p), \dots, L(\frac{\partial}{\partial x_n}|_p)$  positiv orientiert ist. Daraus folgt, dass eine orientierungserhaltende Abbildung die Klasse der positiv orientierten Basen erhält.

(3) Ein Diffeomorphismus heißt *orientierungserhaltend*, falls das Differential orientierungserhaltend ist.

**Lemma 4.4.3.** Seien  $X_1(t), \dots, X_n(t)$  differenzierbare Vektorfelder längs  $c : [0, a] \rightarrow M$ , so dass

$$X_1(t), \dots, X_n(t) \in T_{c(t)} M$$

linear unabhängig sind. Ist  $(X_1(0), \dots, X_n(0))$  positiv orientiert, so auch  $(X_1(t), \dots, X_n(t))$  für alle  $t \in [0, a]$ .

*Beweis.* Sei  $(x, U)$  eine Karte und nehme zunächst an:  $c([0, a]) \subset U$ . Dann besitzen die Vektorfelder  $X_1(t), \dots, X_n(t)$  die Darstellungen  $X_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) \frac{\partial}{\partial x_j}|_{c(t)}$ . Da  $\det a_{ij}(t) \neq 0$  für alle  $t \in [0, a]$  und  $\det a_{ij}(0) > 0$  folgt aus der Stetigkeit von  $t \mapsto \det(a_{ij}(t))$  mittels des Zwischenwertsatzes:  $\det(a_{ij}(t)) > 0$  für alle  $t \in [0, a]$ .

Im allgemeinen Falle wähle Karten  $(x_i, U_i) \in \mathcal{A}$ , so dass die Umgebungen  $U_1, \dots, U_n$  eine Überdeckung von  $c[0, a]$  bilden und argumentiere dann wie oben.  $\square$

**Bemerkung.** Sei  $c : [0, a] \rightarrow M$  eine differenzierbare Kurve und  $P_{c(0),c(t)} : T_{c(0)}M \rightarrow T_{c(t)}M$  die Parallelverschiebung längs  $c$ . Ist  $v_1, \dots, v_n \in T_{c(0)}M$  eine positiv orientierte Basis, so auch  $V_1(t), \dots, V_n(t)$  mit  $P_{c(0),c(t)}v_i = V_i(t)$ . Insbesondere ist  $P_{c(0),c(t)}$  orientierungserhaltend.

**Satz 4.4.4.** (Synge)

Sei  $(M, g)$  eine kompakte orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit mit strikt positiver Krümmung. Ist  $\dim M$  gerade, so ist jede geschlossene Kurve nullhomotop, d.h. jede geschlossene Kurve läßt sich stetig in eine Punktkurve deformieren.

**Bemerkung.** Mannigfaltigkeiten, für die jede geschlossene Kurve nullhomotop ist, heißen einfach zusammenhängend. Der reell projektive Raum

$$\mathbb{R}P^n := S^n / \Gamma$$

mit  $\Gamma = \{\text{id}, \gamma\}$ , wobei  $\gamma(p) = -p$  ist (wie wir sehen werden) ein Beispiel einer kompakten nicht einfach zusammenhängenden Riemannschen Mannigfaltigkeit mit Krümmung  $+1$ . Dies steht nicht im Widerspruch zum obigen Satz, denn ist  $n$  gerade, so ist  $\mathbb{R}P^n$  nicht orientierbar. Daher ist die Voraussetzung der Orientierbarkeit notwendig. Genauso ist die Voraussetzung an die Dimension notwendig, denn für  $n$  ungerade ist  $\mathbb{R}P^n$  orientierbar.

Wichtig für den Beweis des Satzes von Synge ist folgendes Lemma, dass wir später beweisen werden.

**Lemma 4.4.5.** Sei  $(M, g)$  eine kompakte, nicht einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann existiert eine geschlossene, nicht nullhomotope Geodätische, die minimal in ihrer Homotopieklasse ist.

Außerdem benötigen wir das folgende Standardresultat aus der linearen Algebra.

**Lemma 4.4.6.** Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum ungerader Dimension und  $L : V \rightarrow V$  eine orthogonale Abbildung mit  $\det L = 1$ . Dann existiert ein  $x \in V$ ,  $x \neq 0$  mit  $L(x) = x$ .

*Beweis.* Satz von Synge:

Angenommen  $M$  wäre nicht einfach zusammenhängend. Dann existiert wegen Lemma 4.4.5 eine geschlossene Geodätische  $c : [0, l] \rightarrow M$ , die nicht nullhomotop und minimal in ihrer Homotopieklasse ist. Da der Levi-Civita Zusammenhang Riemannsch ist, induziert die Parallelverschiebung längs  $c$  eine orthogonale Abbildung  $P := P_{c(0),c(l)} : T_{c(0)}M \rightarrow T_{c(l)}M$ . Wegen Lemma 4.4.3 folgt aus der Orientierbarkeit von  $M$ , dass  $P$  orientierungserhaltend ist und somit gilt  $\det P = 1$ . Sei  $\dot{c}(0)^\perp$  die Menge der Vektoren in  $T_{c(0)}M$  orthogonal zu  $\dot{c}(0)$ . Dann ist  $P : \dot{c}(0)^\perp \rightarrow \dot{c}(l)^\perp$  ebenfalls eine orthogonale Abbildung mit Determinante 1, und da die Dimension von  $\dot{c}(0)^\perp$  ungerade ist, existiert wegen Lemma 4.4.6 ein paralleles Vektorfeld  $X : [0, l] \rightarrow TM$  längs  $c$  mit  $X(0) = X(l)$ . Betrachte die zu  $X$  gehörige Variation  $\alpha : (-\epsilon, +\epsilon) \times [0, l] \rightarrow M$  mit  $\alpha(s, t) = \exp_{c(t)}(sX(t))$ . Dann folgt für  $L(s) = L(\alpha_s)$  wegen Bemerkung (f) nach Satz 4.3.7:

$$L''(0) = - \int_0^l K(\dot{c}(t), X(t)) dt < 0.$$

Daher hat  $L$  in 0 ein lokales Maximum, d.h. es existiert ein  $\epsilon > 0$  mit  $L(s) < L(0)$  für alle  $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ . Da aber  $\alpha_s$  homotop zu  $\alpha_0 = c$  ist, erhalten wir einen Widerspruch zur Minimalität von  $c$ .  $\square$

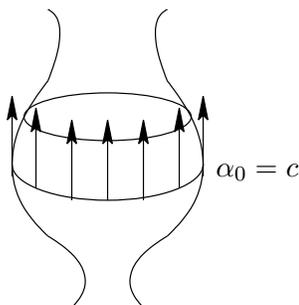


Abbildung 4.6:

**Bemerkung.** Zu jeder nicht orientierbaren Mannigfaltigkeit  $M$  existiert eine orientierbare Mannigfaltigkeit  $\tilde{M}$  und eine 2-elementige Untergruppe  $\Gamma = \{\text{id}, \gamma\} \subset \text{Diff}(\tilde{M})$ , die eigentlich diskontinuierlich auf  $\tilde{M}$  operiert, so dass  $\tilde{M}/\Gamma = M$ . Dabei ist  $\gamma$  orientierungsumkehrend. Die Mannigfaltigkeit  $\tilde{M}$  heißt *Orientierungsüberlagerung* und ist eine 2-blättrige Überlagerung von  $M$ . Betrachte zum Beispiel den projektiven Raum  $\mathbb{R}P^2 = S^2/\{\text{id}, \gamma\}$  mit  $\gamma(p) = -p$ , oder die Kleinsche Flasche  $K = T^2/\Gamma$ .

## 4.5 Geodätische Variationen und Jacobifelder

**Definition 4.5.1.** Sei  $c : I \rightarrow M$  eine Geodätische. Ein Vektorfeld  $J \in \Gamma_c(TM)$  längs  $c$  heißt *Jacobifeld*, falls

$$\frac{D^2}{dt^2} J + R(J, \dot{c})\dot{c} = 0 \quad (4.2)$$

Die Gleichung (4.2) heißt *Jacobigleichung*.

Jacobifelder sind Variationsvektorfelder spezieller Variationen, nämlich der geodätischen Variation.

**Satz 4.5.2.** Sei  $c : I \rightarrow M$  eine Geodätische und  $\alpha : (-\epsilon, +\epsilon) \times I \rightarrow M$  eine geodätische Variation von  $c$ , d.h. die Kurven  $\alpha_s : I \rightarrow M$  sind Geodätische und  $\alpha_0 = c$ . Dann ist das zugehörige Variationsvektorfeld  $X(t) = \frac{\partial}{\partial s}\big|_{s=0} \alpha(s, t)$  ein Jacobifeld.

*Beweis.* Aus dem Symmetriema 3.2.5 und Lemma 4.3.6 folgt

$$\begin{aligned} \frac{D^2}{dt^2} X(t) &= \frac{D}{dt} \frac{D}{dt} \frac{\partial}{\partial s} \bigg|_{s=0} \alpha(s, t) = \frac{D}{dt} \frac{D}{\partial s} \bigg|_{s=0} \frac{\partial}{\partial t} \alpha(s, t) \\ &= \frac{D}{\partial s} \bigg|_{s=0} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \alpha(s, t) + R \left( \frac{\partial}{\partial t} \alpha(0, t), \frac{\partial}{\partial s} \bigg|_{s=0} \alpha(s, t) \right) \frac{\partial}{\partial t} \alpha(0, t) \\ &= R(\dot{c}(t), X(t))\dot{c}(t) = -R(X(t), \dot{c}(t))\dot{c}(t). \end{aligned}$$

□

**Bemerkungen.** (a)  $\dot{c}$  ist trivialerweise immer ein Jacobifeld.

- (b) Aus Bemerkung (b) nach Lemma 4.1.2 folgt, dass für jedes  $t \in I$  die Abbildung  $R(t) : T_{c(t)}M \rightarrow T_{c(t)}M$  mit  $R(t)v := R(v, \dot{c}(t))\dot{c}(t)$  ein symmetrischer Endomorphismus ist, d.h.  $\langle R(t)v, w \rangle = \langle v, R(t)w \rangle$ .  $R(t)$  definiert ein Tensor vom Typ  $(1, 1)$ , den wir auch *Jacobioperator* (längs  $c$ ) nennen.
- (c) Sei  $E_1(t), \dots, E_n(t) \in T_{c(t)}M$  eine parallele ON-Basis längs  $c$ , d.h. die Vektorfelder  $E_1(t), \dots, E_n(t)$  sind parallel und bilden für jedes  $t \in I$  eine ON-Basis von  $T_{c(t)}M$ . Die Koeffizienten der Matrixdarstellung von  $R(t)$  bezüglich  $E_1(t), \dots, E_n(t)$  sind dann gegeben durch

$$R_{ij}(t) = \langle R(t)E_j(t), E_i(t) \rangle,$$

denn ist  $R(t)E_j(t) = \sum_{i=1}^n a_{ij}E_i(t)$ , so ist  $a_{ij}(t) = \langle R(t)E_j(t), E_i(t) \rangle =: R_{ij}(t)$ .

**Satz 4.5.3.** Sei  $c : I \rightarrow M$  eine Geodätische und  $E_1(t), \dots, E_n(t)$  eine parallele ON-Basis längs  $c$ . Ein Vektorfeld  $J : I \rightarrow TM$  längs  $c$  ist genau dann ein Jacobifeld, falls die Komponenten  $(J_1(t), \dots, J_n(t)) \in \mathbb{R}^n$  bezüglich der parallelen ON-Basis  $E_1(t), \dots, E_n(t)$  die gewöhnliche lineare Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \ddot{J}_1(t) \\ \vdots \\ \ddot{J}_n(t) \end{pmatrix} + R(t) \begin{pmatrix} J_1(t) \\ \vdots \\ J_n(t) \end{pmatrix} = 0 \quad (4.3)$$

erfüllen, wobei  $R(t)$  als die wie oben definierte Matrix aufgefaßt wird. Insbesondere existiert zu  $v, w \in T_{c(t_0)}M$  genau ein Jacobifeld mit  $J(t_0) = v$  und  $\frac{D}{dt}J(t_0) = w$ .

*Beweis.* Sei  $J : I \rightarrow TM$  ein Vektorfeld längs  $c$  und  $J(t) = \sum_{i=1}^n J_i(t)E_i(t)$ . Dann gilt:

$$\frac{D}{dt}J(t) = \sum_{i=1}^n \dot{J}_i(t)E_i(t)$$

und

$$\frac{D^2}{dt^2}J(t) = \sum_{i=1}^n \ddot{J}_i(t)E_i(t)$$

sowie

$$R(J(t), \dot{c}(t))\dot{c}(t) = \sum_{i=1}^n J_i(t)R(E_i(t), \dot{c}(t))\dot{c}(t) = \sum_{i=1}^n J_i(t)R(t)(E_i(t))$$

Daher folgt:

$$\frac{D^2}{dt^2}J(t) + R(J(t), \dot{c}(t))\dot{c}(t) = \sum_{i=1}^n \ddot{J}_i(t)E_i(t) + \sum_{i=1}^n J_i(t)R(t)(E_i(t)) \quad (4.4)$$

Durch skalare Multiplikation von (4.4) mit  $E_j(t)$  erhalten wir die Äquivalenz der Gleichungen

$$\frac{D^2}{dt^2}J(t) + R(J(t), \dot{c}(t))\dot{c}(t) = 0$$

und

$$\ddot{J}_j(t) + \sum_{i=1}^n R_{ji}(t)J_i(t) = 0.$$

Daraus folgt der 1. Teil der Behauptung.

Sind  $v, w \in T_{c(t_0)}M$  und  $v = \sum_{i=1}^n v_i E_i(t_0)$  sowie  $w = \sum_{i=1}^n w_i E_i(t_0)$ , so existiert genau eine Lösung der linearen Differentialgleichung 2. Ordnung.

$$\begin{pmatrix} \ddot{J}_1(t) \\ \vdots \\ \ddot{J}_n(t) \end{pmatrix} + R(t) \begin{pmatrix} J_1(t) \\ \vdots \\ J_n(t) \end{pmatrix} = 0$$

mit  $(J_1(t_0), \dots, J_n(t_0)) = (v_1, \dots, v_n)$  und  $(\dot{J}_1(t_0), \dots, \dot{J}_n(t_0)) = (w_1, \dots, w_n)$ . Dann ist aber  $J(t) = \sum J_i(t)E_i(t)$  das eindeutig bestimmte Jacobifeld mit  $J(t_0) = v$  und  $\frac{D}{dt}J(t_0) = w$ .  $\square$

**Bemerkungen.** (a) Die Menge der Jacobifelder  $J_c(TM)$  längs der Geodätischen  $c : I \rightarrow M$  bildet einen  $2n$ -dimensionalen Vektorraum. Die Abbildung

$$L : T_{c(t_0)}M \times T_{c(t_0)}M \rightarrow J_c(TM)$$

mit  $(v, w) \mapsto J$ , wobei  $J$  das Jacobifeld ist mit  $J(t_0) = v$  und  $\frac{D}{dt}J(t_0) = w$ , ist ein linearer Isomorphismus. Insbesondere ist  $J_c(TM)$  Untervektorraum des Vektorraumes aller Vektorfelder  $\Gamma_c(TM)$  längs  $c$ .

(b) Spezielle geodätische Variationen erhält man mittels der Exponentialabbildung  $\exp_p : T_pM \rightarrow M$ . Betrachte für  $v \in T_pM$  die Gerade  $\gamma(t) = vt$  durch  $0_p \in T_pM$ . Diese Gerade ist eine Geodätische im euklidischen Vektorraum  $(T_pM, g_p)$ . Sie wird auf eine Geodätische unter  $\exp_p$  abgebildet. Zu  $w \in T_pM$  definiere ein Vektorfeld  $X(t) = wt \in T_{\gamma(t)}(T_pM)$  längs  $\gamma$ . (Dabei identifiziere wie üblich  $T_{\gamma(t)}(T_pM)$  mit  $T_pM$ ). Der Levi-Cevita Zusammenhang auf dem euklidischen Vektorraum  $(T_pM, g_p)$  ist durch die gewöhnliche Ableitung gegeben, der Krümmungstensor verschwindet. Daher kann  $X(t) = tw$  als ein Jacobifeld von  $T_pM$  längs  $\gamma(t)$  interpretiert werden mit  $X(0) = 0$  und  $\frac{d}{dt}|_{t=0}X(t) = w$ . Außerdem ist  $H(s, t) = vt + sX(t) = t(v + sw)$  die zugehörige geodätische Variation in  $T_pM$ . Diese Variation läßt sich nun mittels der Exponentialabbildung auf eine geodätische Variation in der gekrümmten Mannigfaltigkeit  $M$  abbilden.

**Satz 4.5.4.** Die Variation  $\alpha(s, t) = \exp_p(H(s, t))$  ist eine geodätische Variation von  $t \mapsto \exp_p(H(0, t)) = \exp_p(vt)$ . Das Variationsvektorfeld  $J(t) = \frac{\partial}{\partial s}|_{s=0}\alpha(s, t)$  ist das Jacobifeld mit  $J(0) = 0$  und  $\frac{D}{dt}J(0) = w$ . Außerdem erfüllt das Differential von  $\exp_p$  im Punkte  $tv$  die Gleichung

$$J(t) = D \exp_p(tv)(tw) = tD \exp_p(tv)(w).$$

*Beweis.* Da  $t \mapsto \exp_p(H(s, t)) = \exp_p(t(v + sw))$  Geodätische sind, ist  $\alpha(s, t)$  eine Geodätische Variation. Damit ist  $J(t) = \frac{\partial}{\partial s}|_{s=0}\alpha(s, t)$  ein Jacobifeld. Da  $\alpha(s, 0) = p$ , ist  $J(0) = 0$ . Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt}\Big|_{t=0} J(t) &= \frac{D}{dt}\Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \alpha(s, t) \\ &= \frac{D}{\partial s}\Big|_{s=0} \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \alpha(s, t) = \frac{D}{\partial s}\Big|_{s=0} (v + sw) = w \end{aligned}$$

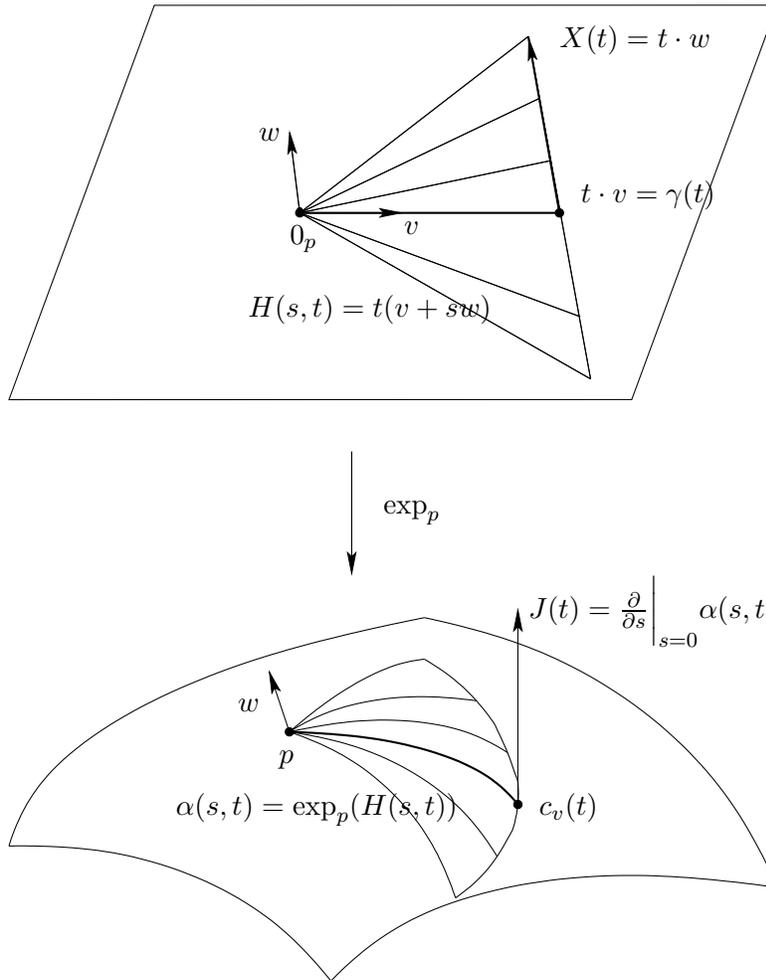


Abbildung 4.7:

Aus der Kettenregel folgt:

$$\begin{aligned}
 J(t) &= \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} \alpha(s, t) = \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} \exp_p(H(s, t)) \\
 &= D \exp_p(H(0, t)) \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} H(s, t) = D \exp_p(tv)(tw)
 \end{aligned}$$

□

**Bemerkung.** Insbesondere folgt:  $J(1) = D \exp_p(v)w$ , falls  $w = \frac{D}{dt} J(0)$ .

Wichtig ist der Begriff des konjugierten Punktes.

**Definition 4.5.5.** (Konjugierte Punkte)

Sei  $c : I \rightarrow M$  eine Geodätische und  $t_0, t_1 \in I$  mit  $t_0 < t_1$ . Der Punkt  $q = c(t_1)$  heißt *konjugiert* zu  $p = c(t_0)$  längs  $c$ , falls ein Jacobifeld  $J$  längs  $c$  existiert mit  $J \neq 0$  und  $J(t_0) = J(t_1) = 0$ .

Bezeichnen wir mit

$$J_c^{t_0, t_1}(TM) = \{J \mid J \text{ Jacobifeld mit } J(t_0) = J(t_1) = 0\},$$

die Menge der in  $t_0$  und  $t_1$  verschwindenden Jacobifelder, so ist  $J_c^{t_0, t_1}(TM)$  ein Untervektorraum von  $J_c(TM)$ . Die Dimension von  $J_c^{t_0, t_1}(TM)$  heißt die *Multiplizität* des konjugierten Punktes.

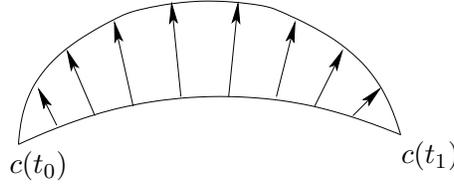


Abbildung 4.8:

**Korollar 4.5.6.** Sei  $v \in T_p M$  und  $c_v : [0, 1] \rightarrow M$  die zugehörige Geodätische mit  $\dot{c}_v(0) = v$ . Dann gilt:

$$\dim \ker D \exp_p(v) = \dim J_{c_v}^{0,1}(TM).$$

Ist insbesondere  $M$  eine Mannigfaltigkeit ohne konjugierte Punkte, d.h. sind alle Geodätischen frei von konjugierten Punkten, so ist  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$  ein lokaler Diffeomorphismus.

*Beweis.* Die Abbildung

$$\phi : \{J \mid J \text{ Jacobifeld längs } c_v \text{ mit } J(0) = 0\} \rightarrow T_{c(0)} M$$

mit  $J \rightarrow \frac{D}{dt}(0)$  ist ein linearer Isomorphismus. Da  $D \exp_p(v)(\frac{D}{dt}(0)) = J(1)$ , ist  $\phi(J_{c_v}^{0,1}) = \ker D \exp_p(v)$ .  $\square$

**Satz 4.5.7.** Sei  $(M, g)$  eine Mannigfaltigkeit mit der Schnittkrümmung  $K \leq 0$ . Dann hat  $(M, g)$  keine konjugierten Punkte.

*Beweis.* Sei  $J : I \rightarrow TM$  ein Jacobifeld längs  $c$ . Betrachte  $f(t) = \|J(t)\|^2 = \langle J(t), J(t) \rangle$ . Dann gilt:  $f'(t) = 2 \langle \frac{D}{dt} J(t), J(t) \rangle$  und

$$\begin{aligned} f''(t) &= 2 \left( \left\langle \frac{D^2}{dt^2} J(t), J(t) \right\rangle + \left\langle \frac{D}{dt} J(t), \frac{D}{dt} J(t) \right\rangle \right) \\ &= 2 \left( -\langle R(J(t), \dot{c}(t))\dot{c}(t), J(t) \rangle + \left\| \frac{D}{dt} J(t) \right\|^2 \right). \end{aligned}$$

Da  $K \leq 0$  folgt aus Definition (4.2.1) der Schnittkrümmung:

$$\langle R(J(t), \dot{c}(t))\dot{c}(t), J(t) \rangle = K(\dot{c}(t), J(t))(\langle J(t), J(t) \rangle \langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle - \langle J(t), \dot{c}(t) \rangle^2) \leq 0.$$

Insbesondere ist  $f''(t) \geq 0$ . Gilt nun  $f(t_0) = f(t_1) = 0$  für  $t_0 < t_1$  so muss die nicht negative, konvexe Funktion  $f$  auf  $[t_0, t_1]$  identisch verschwinden. Also ist  $J$  identisch null und somit existieren keine konjugierten Punkte.  $\square$

**Bemerkung.** Wir halten also fest: hat eine Mannigfaltigkeit  $M$  nicht positive Schnittkrümmung oder allgemeiner keine konjugierten Punkte, so ist für jedes  $p \in M$  die Exponentialabbildung  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$  ein lokaler Diffeomorphismus. Wir werden daraus ein globales Resultat folgern. Nämlich wir werden zeigen, dass  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$  eine Überlagerung ist. Dies hat weitreichende Konsequenzen. Aus diesem und weiteren Gründen werden wir im nächsten Abschnitt die für uns wichtigen Aspekte der Überlagerungstheorie skizzieren. Detailliertere Informationen können aus den entsprechenden Standardwerken der Topologie entnommen werden.



## Kapitel 5

# Überlagerungstheorie und Anwendungen in der Geometrie

### 5.1 Überlagerungen

Die Überlagerungstheorie ist ein Teilgebiet der Topologie. Wir werden wichtige Aspekte, in Hinblick auf Anwendungen in der Riemannschen Geometrie, behandeln.

**Definition 5.1.1.** (Überlagerung)

Sei  $X$  ein topologischer Hausdorffraum (siehe Definition 1.1.1). Außerdem nehmen wir an, dass  $X$  *lokal wegweise zusammenhängend* ist, d.h. jede offene Umgebung enthält eine wegweise zusammenhängende offene Umgebung. Ein topologischer Raum  $E$  heißt *Überlagerung* von  $X$ , falls eine stetige surjektive Abbildung  $p : E \rightarrow X$  (*Überlagerungsabbildung*) mit folgender Eigenschaft existiert.

- Für alle  $x \in X$  gibt es eine offene Umgebung  $U$  von  $x$  (*Elementarumgebung*), so dass  $p^{-1}(U)$  eine disjunkte Vereinigung von in  $E$  offenen Mengen  $\{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$  darstellt. Außerdem ist  $p : U_\alpha \rightarrow U$  für jedes  $\alpha \in I$  ein Homöomorphismus (siehe Abbildung 5.1).

**Bemerkungen.** (a) Die Mengen  $U_\alpha$  heißen *Blätter* über  $U$ . Die Menge  $p^{-1}(x) = E_x$  heißt *Faser* über  $x \in X$ . Sie ist eine diskrete abgeschlossene Teilmenge von  $E$ , denn Urbilder abgeschlossener Teilmengen sind unter stetigen Abbildungen abgeschlossen und einpunktige Teilmengen in einem Hausdorffraum sind abgeschlossen. Das Komplement eines Punktes in einem Hausdorffraum lässt sich als Vereinigung offener Mengen schreiben und ist somit offen.

- (b) Ist  $E_x$  endlich und  $X$  zusammenhängend, so stimmt für alle  $y \in X$  die Mächtigkeit von  $E_y$  mit der von  $E_x$  überein. Sie bestimmt die Anzahl der Blätter. Ist  $E$  kompakt, so ist  $E_x$  als abgeschlossene Teilmenge kompakt und als diskrete Teilmenge somit endlich.
- (c) In den Anwendungen werden die betrachteten Räume immer Mannigfaltigkeiten sein. Insbesondere sind diese Räume hausdorffsch und lokal wegweise zusammenhängend. Es sei darauf hingewiesen, dass allgemeine wegweise zusammenhängende topologische Räume nicht automatisch lokal wegweise zusammenhängend sind, wie Bild 5.2 zeigt. Ist  $X$  lokal wegweise zusammenhängend, so auch  $E$ .

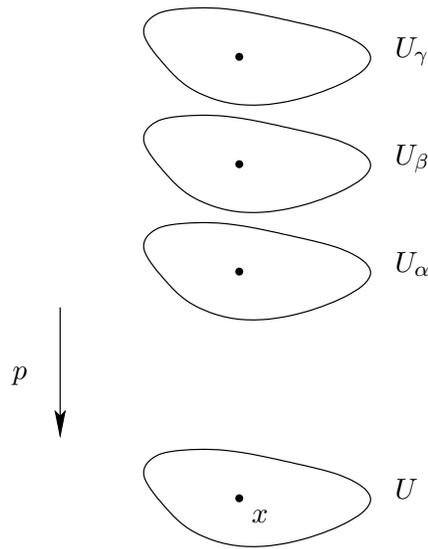


Abbildung 5.1:

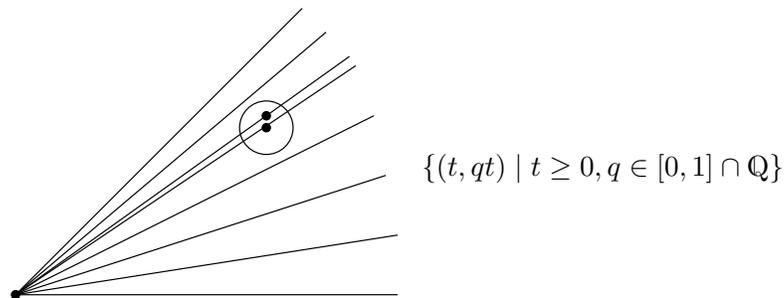


Abbildung 5.2:

**Beispiele.** (1) Betrachte die Abbildung  $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  mit  $t \mapsto e^{2\pi it} = (\cos(2\pi t) + i \sin(2\pi t))$ . Es folgt, dass  $p$  eine Überlagerung von  $\mathbb{R}$  über  $S^1$  induziert (die Abbildung 5.3 zeigt zwei Darstellungen dieser Überlagerung).

(2) Alle Beispiele, die wir betrachten werden, entstehen aus Gruppenaktionen diskreter Gruppen (siehe Definition 2.2.3). Sei  $E$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und  $\Gamma$  eine diskrete Gruppe, die fixpunktfrei und eigentlich auf  $E$  operiert. Dabei operiert  $\Gamma$  als diskrete Gruppe eigentlich, falls für jede kompakte Teilmenge  $K \subset E$  die Menge

$$\Gamma_K = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma K \cap K \neq \emptyset\}$$

endlich ist (siehe Kapitel 2, Definition 2.2.4). Die Gruppe  $\Gamma$  induziert eine Äquivalenz-

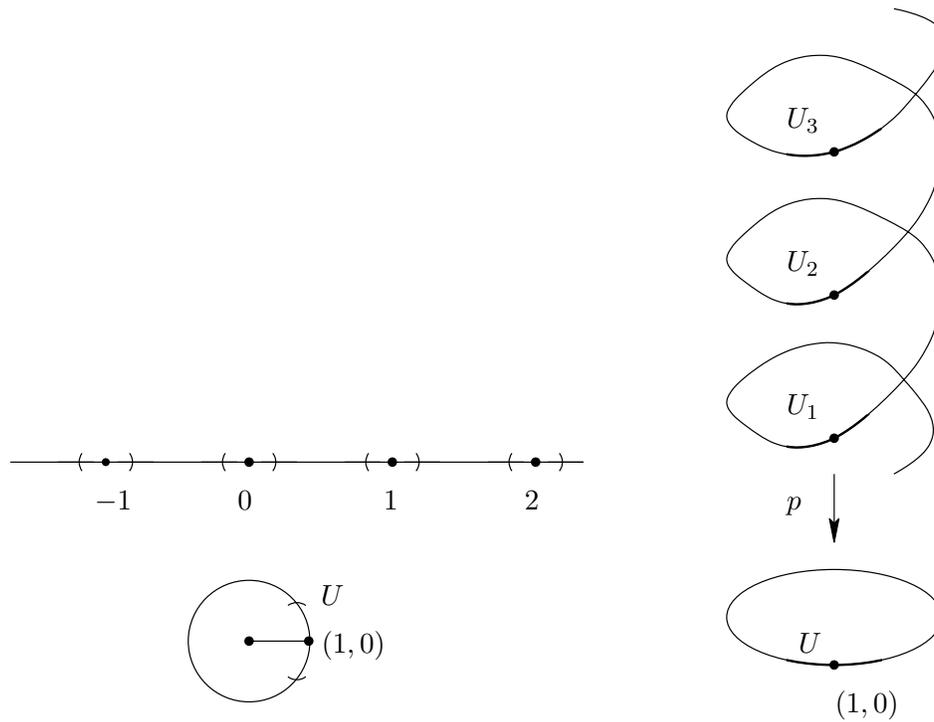


Abbildung 5.3:

relation auf  $E$  durch die Relation

$$x \sim y \Leftrightarrow y = \gamma(x) \text{ mit } \gamma \in \Gamma.$$

Mit  $E/\Gamma = \{[x] = \Gamma(x) \mid x \in E\}$  bezeichnen wir die Äquivalenzklassen und mit

$$p: E \rightarrow E/\Gamma = \{[x] \mid x \in E\}.$$

die kanonische Projektion. Wählt man auf  $E/\Gamma$  die Quotiententopologie, d.h. sei  $O \subset E/\Gamma$  genau dann offen, falls  $p^{-1}(O)$  offen in  $E$  ist, so ist  $p$  eine Überlagerungsabbildung. Denn zu jedem  $x \in E$  existiert  $V \subset E$  offen, so dass  $\gamma(V) \cap V = \emptyset$  für alle  $\gamma \in \Gamma \setminus \{\text{id}\}$ . Dann ist  $U := p(V) = \{[x] \mid x \in V\}$  eine Elementarumgebung und  $\{\gamma(V) \mid \gamma \in \Gamma\}$  sind die Blätter über  $U$ . Wegen Satz 2.2.7 kann man auf  $E/\Gamma$  sogar eine differenzierbare Struktur definieren, so dass die Projektion  $p: E \rightarrow E/\Gamma$  zu einem lokalem Diffeomorphismus wird. Konkrete Beispiele sind:

- (a) Sei  $E = \mathbb{R}^2$  und  $(\mathbb{Z}^2, +)$  die Gruppe der ganzzahligen Gitterpunkte in  $\mathbb{R}^2$ . Für alle  $a \in \mathbb{Z}^2$  definiert  $a(x) = a + x$  eine Gruppenoperation von  $\mathbb{Z}^2$  auf  $\mathbb{R}^2$ . Dann ist

$$\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = T^2,$$

und  $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$  mit  $x \rightarrow [x]$  eine Überlagerung (siehe Abbildung 5.4)

- (b) Betrachte auf  $S^n$  die Operation der Gruppe  $\Gamma = \mathbb{Z}_2 = (\{1, -1\}, \cdot)$ , definiert durch:

$$1(x) = x \quad \text{und} \quad (-1)(x) = -x$$

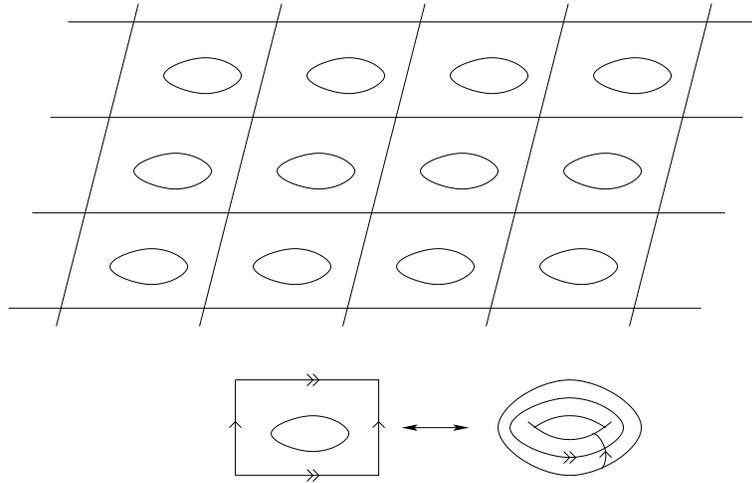


Abbildung 5.4:

Diese Gruppenoperation ist offensichtlich eigentlich und fixpunktfrei und es gilt:

$$S^n / \Gamma = \mathbb{R}P^n.$$

Die Abbildung  $p : S^n \rightarrow S^n / \Gamma =: \mathbb{R}P^n$  mit  $p(x) = [x]$  definiert eine zweiblättrige Überlagerung.

Die folgende Abbildungen sind keine Überlagerungen.

- (1)  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $(x, y) \rightarrow x$  ist keine Überlagerung, denn  $p$  ist kein lokaler Homöomorphismus. Außerdem sind die Fasern nicht diskret.
- (2) Die Skizze 5.5 zeigt eine Abbildung mit diskreten Fasern. Sie ist aber kein lokaler Homöomorphismus.

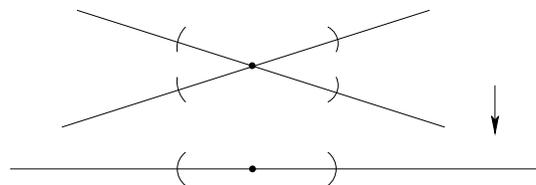


Abbildung 5.5:

- (3) Betrachte  $p : (-1/2, 1) \rightarrow S^1$  mit  $x \mapsto e^{2\pi i x}$ . Die Abbildung  $p$  ist lokaler Homöomorphismus (sogar lokaler Diffeomorphismus). Sei  $U$  eine beliebige offene Umgebung von  $(1, 0) \in S^1$ . Dann enthält  $V = p^{-1}(U)$  die Punkte 0, 1. Ist  $U$  eine Elementarumgebung, so ist  $V$  nicht zusammenhängend und lässt sich als disjunkte Vereinigung zweier offener Mengen  $U_1, U_2$  mit  $0 \in U_1$  und  $1 \in U_2$  schreiben (siehe Abbildung 5.6). Offensichtlich ist  $p : U_2 \rightarrow U$  nicht surjektiv. Also existiert keine Elementarumgebung von  $(1, 0) \in S^1$ .

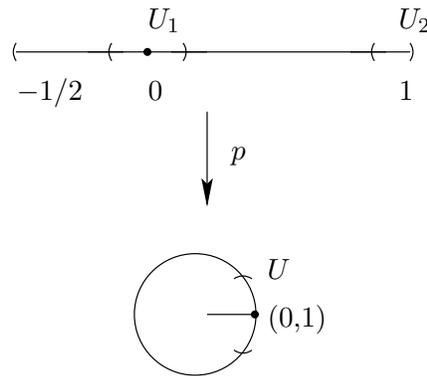
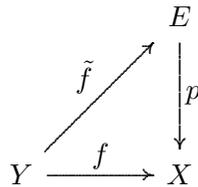


Abbildung 5.6:

Wir wollen nun untersuchen, in welchen Fällen wir einer Überlagerung eine diskrete Gruppenaktion zuordnen können. Wichtig dafür ist Begriff des *Lifts* (*Hochhebung*).

**Definition 5.1.2.** Sei  $p : E \rightarrow X$  eine Überlagerung, und  $f : Y \rightarrow X$  eine stetige Abbildung. Eine stetige Abbildung  $\tilde{f} : Y \rightarrow E$  heißt *Lift* von  $f$ , falls das Diagramm



kommutiert, d.h.  $p \circ \tilde{f} = f$ .

**Bemerkung.** Die Existenz eines Lifts ist nicht immer gewährleistet. Als Beispiel betrachte die Überlagerung  $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  mit  $p(t) = e^{2\pi it}$ . Dann besitzt die identische Abbildung  $f : S^1 \rightarrow S^1$  mit  $x \mapsto x$  keinen Lift. Denn wäre  $\tilde{f} : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  ein Lift von  $f$ , so würde  $p \circ \tilde{f}(e^{2\pi it}) = e^{2\pi it}$

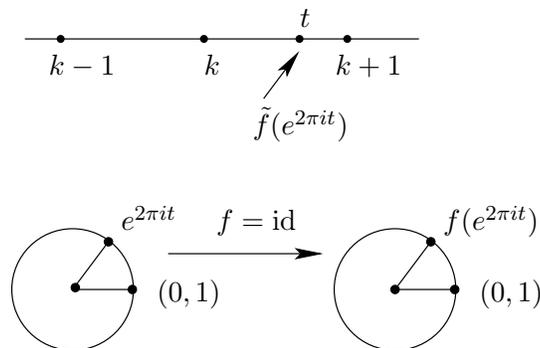


Abbildung 5.7:

gelten (siehe Abbildung 5.7). Da

$$p^{-1}(e^{2\pi it}) = \{t + k \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

existiert dann ein  $k_t \in \mathbb{Z}$  mit  $\tilde{f}(e^{2\pi it}) = t + k_t$  für alle  $0 \leq t < 1$ . Wegen der Stetigkeit von  $\tilde{f}$  ist  $k_t = k$  konstant und daher ist

$$\lim_{t^- \rightarrow 1} \tilde{f}(e^{2\pi it}) - \lim_{t^+ \rightarrow 0} \tilde{f}(e^{2\pi it}) = 1.$$

Also ist  $\tilde{f}$  auf  $S^1$  als stetige Abbildung nicht definiert.

**Satz 5.1.3.** (Eindeutigkeit des Lifts)

Sei  $p : E \rightarrow X$  eine Überlagerung,  $Y$  zusammenhängend und  $f : Y \rightarrow X$  stetig. Sind  $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : Y \rightarrow E$  Lifte von  $f$  mit

$$\tilde{f}_1(y_0) = \tilde{f}_2(y_0)$$

für ein  $y_0 \in Y$ , so ist  $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$ .

*Beweis.* Wir zeigen: Die Menge  $A = \{y \in Y \mid \tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y)\}$  ist offen und abgeschlossen.

(1) Die Menge  $A$  ist offen, da  $p$  ein lokaler Homöomorphismus ist. Denn ist  $z \in A$ , so existiert eine offene Umgebung  $V \subset E$  von  $\tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z) = q$  und eine offene Umgebung  $U \subset X$  von  $p(q)$ , so dass  $p : V \rightarrow U$  ein Homöomorphismus ist. Aus  $p \circ \tilde{f}_1(y) = p \circ \tilde{f}_2(y)$  folgt somit  $\tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y)$  für alle  $y \in Y$  mit  $\tilde{f}_1(y), \tilde{f}_2(y) \in V$ . Daher ist  $\tilde{f}_1^{-1}(V) \cap \tilde{f}_2^{-1}(V)$  eine offene Umgebung von  $z$ , die in  $A$  enthalten ist, und somit ist  $A$  offen.

(2) Die Abgeschlossenheit von  $A$  ist eine Konsequenz der Stetigkeit von  $\tilde{f}_1$  und  $\tilde{f}_2$ .

Da  $y_0 \in A \neq \emptyset$  und  $Y$  zusammenhängend, folgt:  $A = Y$ . □

Nun wollen wir hinreichende Kriterien für die Existenz eines Liftes angeben. Diese Kriterien lassen sich meistens aus folgendem Sachverhalt ableiten. Besitzt eine stetige Abbildung  $f : Y \rightarrow X$  einen Lift, so auch jede Homotopie von  $f$ . Genauer

**Lemma 5.1.4.** Sei  $p : E \rightarrow X$  eine Überlagerung und es sei  $\tilde{f} : Y \rightarrow E$  ein Lift der stetigen Abbildung  $f : Y \rightarrow X$ . Dann besitzt auch jede stetige Abbildung  $F : [0, 1] \times Y \rightarrow X$  mit  $F(0, y) = f(y)$  genau einen Lift mit  $\tilde{F}(0, y) = \tilde{f}(y)$ .

**Bemerkung.** Die Abbildung  $F$  heißt *Homotopie* von  $f$ .

*Beweis.* Die Eindeutigkeit folgt aus Satz 5.1.3. Es bleibt also die Existenz zu beweisen. Sei  $y \in Y$  fest gewählt. Wegen der Kompaktheit von  $[0, 1] \times \{y\}$  und der Stetigkeit von  $F$  existiert eine offene Umgebung  $U_y \subset Y$  von  $y$  und eine Unterteilung

$$0 < a_0(y) < \dots < a_{n_y}(y) = 1,$$

so dass  $F([a_i(y), a_{i+1}(y)] \times U_y)$  in einer Elementarumgebung  $V_{y,i}$  der Überlagerung  $p$  enthalten ist. Insbesondere ist dann  $p^{-1}(V_{y,i})$  eine disjunkte Vereinigung offener Mengen in  $E$  und die Einschränkung von  $p$  auf eine der Zusammenhangskomponenten ist ein Homöomorphismus. Definiere nun  $\tilde{F}_y : [0, 1] \times U_y \rightarrow E$  wie folgt:

- Sei  $E_{y,0}$  die Zusammenhangskomponente von  $p^{-1}(V_{y,0})$ , die  $\tilde{f}(y)$  enthält, so setze

$$\tilde{F}_y(t, z) = p^{-1}|_{E_{y,0}}(F(t, z))$$

für alle  $(t, z) \in [0, a_1(y)] \times U_y$ . Insbesondere folgt  $\tilde{F}_y(0, z) = \tilde{f}(z)$  für alle  $z \in U_y$ .

- Ist  $\widetilde{F}_y : [0, a_i(y)] \times U_y \rightarrow E$  schon definiert und  $E_{y,i}$  die Zusammenhangskomponente von  $p^{-1}(V_{y,i})$ , die  $\widetilde{F}_y(a_i(y), y)$  enthält, so setze

$$\widetilde{F}_y(t, z) = p^{-1}|_{E_{y,i}}(F(t, z))$$

für alle  $(t, z) \in [a_i(y), a_{i+1}(y)] \times U_y$ .

Ist nun  $U_{y_1} \cap U_{y_2} \neq \emptyset$ , so stimmen die oben erklärten Lifte  $\widetilde{F}_{y_1}$  und  $\widetilde{F}_{y_2}$  auf dem Durchschnitt  $[0, 1] \times U_{y_1} \cap U_{y_2}$  überein, denn ist  $z \in U_{y_1} \cap U_{y_2}$ , so ist  $\widetilde{F}_{y_1}(0, z) = \widetilde{F}_{y_2}(0, z)$  und es folgt  $\widetilde{F}_{y_1}(t, z) = \widetilde{F}_{y_2}(t, z)$  aus Satz 5.1.3, denn  $[0, 1] \times \{z\}$  ist zusammenhängend.

Somit erhalten wir einen Lift  $\widetilde{F}$  von  $F$ , wohldefiniert durch  $\widetilde{F}(t, z) := \widetilde{F}_y(t, z)$  für  $z \in U_y$  mit den verlangten Eigenschaften. Er ist eindeutig durch die Vorgabe  $\widetilde{F}(0, y) = \widetilde{f}(y)$  bestimmt, denn  $[0, 1] \times \{y\}$  ist zusammenhängend.  $\square$

Als wichtige Konsequenz erhalten wir das folgende Korollar.

**Korollar 5.1.5.** Sei  $p : E \rightarrow X$  eine Überlagerung und  $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ . Dann besitzt jede stetige Kurve  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  mit  $\alpha(0) = x_0$  genau einen Lift  $\tilde{\alpha}$  mit  $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0$ . Außerdem besitzt jede stetige Abbildung  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  einen Lift.

*Beweis.* Die Abbildung  $f : \{0\} \rightarrow X$  mit  $0 \rightarrow x_0$  besitzt einen Lift  $\tilde{f}$  mit  $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$ . Dann definiert die stetige Kurve  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  mit  $\alpha(0) = x_0$  eine Homotopie von  $f$  und läßt sich daher wegen Lemma 5.1.4 liften. Genauso kann  $H$  als Homotopie der Kurve  $H_0(t) = H(0, t)$  interpretiert werden und besitzt somit ebenfalls einen Lift.  $\square$

## 5.2 Fundamentalgruppe und Überlagerungen

**Definition 5.2.1.** (Fundamentalgruppe)

Sei  $X$  ein topologischer Raum:

- Zwei stetige Kurven  $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X$  mit  $\alpha(0) = \beta(0)$ ,  $\alpha(1) = \beta(1)$  heißen *homotop* ( $\alpha \sim \beta$ ), wenn eine stetige Abbildung  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  mit  $H(0, t) = \alpha(t)$  und  $H(1, t) = \beta(t)$ , sowie  $H(s, 0) = \alpha(0)$  und  $H(s, 1) = \alpha(1)$  existiert. Die Abbildung  $H$  heißt *Homotopie* zwischen  $\alpha$  und  $\beta$  (siehe Abbildung 5.8). Die Relation  $\sim$  ist, wie man leicht überprüft, eine Äquivalenzrelation.

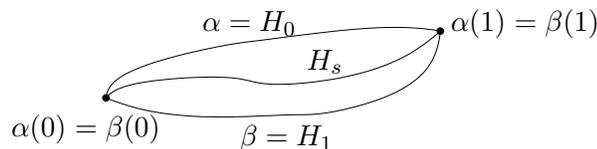


Abbildung 5.8:

- Sei  $x_0 \in X$ . Dann heißt

$$\pi_1(X, x_0) = \{\alpha : [0, 1] \rightarrow X \mid \text{mit } x_0 = \alpha(0) = \alpha(1)\} / \sim$$

*Fundamentalgruppe.* Die Gruppenstruktur ist durch

$$[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha * \beta]$$

definiert, wobei

$$\alpha * \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \beta(2t - 1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

**Bemerkungen.** (a) Man muss zeigen, dass die Struktur “ $\cdot$ ” wohldefiniert ist und dass die Gruppengesetze erfüllt sind. Das neutrale Element der Gruppe wird von der Klasse der Kurven, die homotop zu der Punktkurve  $x_0$  ist, gegeben.

(b) Man kann zeigen, dass  $\pi_1(X, x_0)$  nicht von der Wahl des Punktes  $x_0 \in X$  abhängt, wenn  $X$  zusammenhängend ist. Also schreibt man auch  $\pi_1(X)$ .

**Satz 5.2.2.** Sei  $p : E \rightarrow X$  eine Überlagerung und  $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X$  homotope Kurven mit  $\alpha(0) = \beta(0)$  und  $\alpha(1) = \beta(1)$ . Sind  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} : [0, 1] \rightarrow E$  Lifte von  $\alpha$  bzw.  $\beta$  und ist  $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0)$ , so auch  $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$ .

*Beweis.* Sei  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  Homotopie mit  $H(0, t) = \alpha(t)$  und  $H(1, t) = \beta(t)$ , sowie  $H(s, 0) = \alpha(0) = \beta(0)$  und  $H(s, 1) = \alpha(1) = \beta(1)$ . Wegen Korollar 5.1 existiert ein Lift  $\tilde{H} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow E$  der Homotopie  $H$  mit  $\tilde{H}(0, t) = \tilde{\alpha}(t)$ . Da  $\tilde{H}(1, 0) = \tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0)$ , und  $\tilde{H}(1, t)$  ein Lift von  $\beta$  folgt wegen Satz 5.1.3:  $\tilde{H}(1, t) = \tilde{\beta}(t)$  und somit  $\tilde{\beta}(1) = \tilde{H}(1, 1) = \tilde{H}(0, 1) = \tilde{\alpha}(1)$ , denn  $s \mapsto \tilde{H}(s, 1)$  ist in der diskreten Menge  $E_{\alpha(1)}$  enthalten und somit konstant.  $\square$

**Definition 5.2.3.** Ein wegzusammenhängender Raum  $Y$  heißt *einfach zusammenhängend*, falls jede geschlossene Kurve nullhomotop ist, d.h.  $\pi_1(Y, y_0) = \{1\}$  für ein  $y_0 \in Y$ .

**Satz 5.2.4.** Sei  $p : E \rightarrow X$  eine Überlagerung und  $f : Y \rightarrow X$  stetig. Ist  $Y$  einfach zusammenhängend und lokal wegweise zusammenhängend, so existiert zu jedem  $y_0 \in Y$  und  $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$  mit  $x_0 = f(y_0)$  genau ein Lift  $\tilde{f} : Y \rightarrow E$  von  $f$  mit  $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$ .

*Beweis.* Sei  $y_0 \in Y$  und  $x_0 = f(y_0)$  und  $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ . Setze  $\tilde{f}(y_0) := \tilde{x}_0$ . Dann läßt sich  $\tilde{f}$  wie folgt zu einem Lift von  $f$  fortsetzen.

Sei  $\alpha : [0, 1] \rightarrow Y$  eine stetige Kurve mit  $\alpha(0) = y_0$  und  $\alpha(1) = y$ . Betrachte die Kurve  $f \circ \alpha : [0, 1] \rightarrow X$ . Diese Kurve besitzt einen stetigen Lift  $\widetilde{f \circ \alpha} : [0, 1] \rightarrow E$  mit  $\widetilde{f \circ \alpha}(0) = \tilde{x}_0$ . Definiere  $\tilde{f}(y) = \widetilde{f \circ \alpha}(1)$ . Diese Definition ist unabhängig von der Wahl von  $\alpha$ . Denn ist  $\beta : [0, 1] \rightarrow Y$  eine weitere Kurve mit  $\beta(0) = \alpha(0) = y_0$  und  $\beta(1) = \alpha(1) = y$ , so sind  $\alpha$  und  $\beta$  und damit  $f \circ \alpha$  und  $f \circ \beta$  homotop. Also folgt aus Satz 5.2.2:  $\widetilde{f \circ \alpha}(1) = \widetilde{f \circ \beta}(1)$  (siehe auch Abbildung 5.9).

Zum Beweis der Stetigkeit von  $\tilde{f} : Y \rightarrow E$  betrachte für  $y \in Y$  eine offene wegweise zusammenhängende Umgebung  $V$  von  $y$  (genau an dieser Stelle benötigt man, dass  $Y$  lokal wegweise zusammenhängend ist), so dass  $\tilde{f}(V)$  in einer Elementarumgebung  $U \subset X$  der Überlagerung  $p : E \rightarrow X$  enthalten ist. Ist  $\tilde{f}(y)$  in einem Blatt  $U' \subset E$  über  $U$  enthalten, so ist  $\tilde{f}(V)$  ganz in  $U'$  enthalten. Um dies zu beweisen, betrachte zu einem beliebigen  $z \in V$  eine Kurve  $\beta : [0, 1] \rightarrow V$  mit  $\beta(0) = y$  und  $\beta(1) = z$ . Der Lift  $\widetilde{f \circ \beta}$  der Kurve  $f \circ \beta : [0, 1] \rightarrow U$  mit  $\widetilde{f \circ \beta}(0) = y$  ist aber dann ganz in  $U'$  enthalten (denn sonst würde das Urbild der stetigen

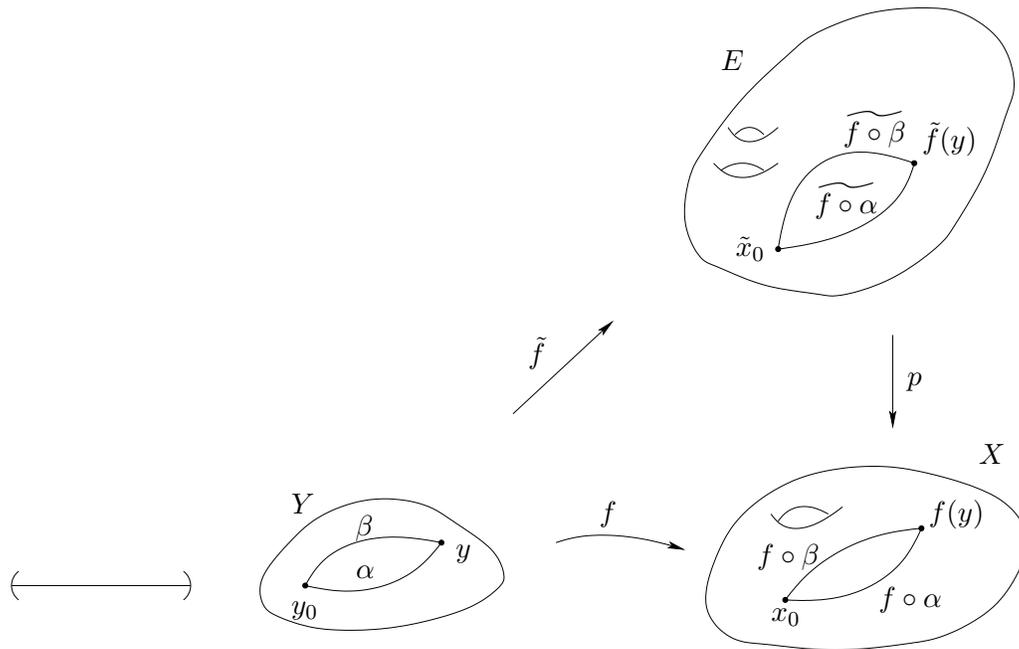


Abbildung 5.9:

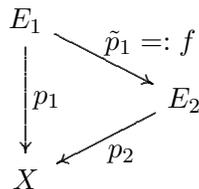
Kurve  $\tilde{f} \circ \beta$  eine disjunkte Zerlegung des Intervalls  $[0, 1]$  in offene Teilmengen induzieren). Insbesondere ist  $\tilde{f}(z) = \tilde{f} \circ \beta(1) \in U'$ . Da  $p: U' \rightarrow U$  ein Homöomorphismus ist erhalten wir:

$$\tilde{f}|_V = p|_{U'}^{-1} \circ f|_V.$$

Aus der Stetigkeit der rechten Seite folgt somit die Stetigkeit von  $\tilde{f}$ . □

Einfach zusammenhängende Überlagerungen sind im folgenden Sinne maximal.

**Korollar 5.2.5.** Seien  $p_1: E_1 \rightarrow X$ ,  $p_2: E_2 \rightarrow X$  Überlagerungen von  $X$  und  $x_0 \in X$ . Ist  $E_1$  einfach zusammenhängend, so existiert zu jedem  $y_1 \in p_1^{-1}(x_0)$  und  $y_2 \in p_2^{-1}(x_0)$  eine stetige Abbildung  $f: E_1 \rightarrow E_2$  mit  $f(y_1) = y_2$  und  $p_2 \circ f = p_1$ .



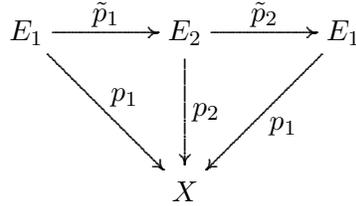
*Beweis.* Da  $E_1$  einfach zusammenhängend und lokal wegweise zusammenhängend ist (denn  $X$  ist nach Voraussetzung lokal wegweise zusammenhängend), existiert wegen Satz 5.2.4 ein Lift  $\tilde{p}_1$  von  $p_1$  mit  $\tilde{p}_1(y_1) = y_2$ . Setze  $f := \tilde{p}_1$ . □

**Definition 5.2.6.** Eine Überlagerung  $p: E \rightarrow X$  heißt *universelle Überlagerung*, falls  $E$  einfach zusammenhängend ist.

**Satz 5.2.7.** (Eindeutigkeit der universellen Überlagerung)

Seien  $p_1 : E_1 \rightarrow X$  und  $p_2 : E_2 \rightarrow X$  zwei universelle Überlagerungen. Dann sind  $E_1$  und  $E_2$  homöomorph.

*Beweis.*



Wähle  $x_0 \in X$ ,  $y_1 \in p_1^{-1}(x_0)$  und  $y_2 \in p_2^{-1}(x_0)$ . Dann existiert wegen Korollar 5.1 ein Lift  $\tilde{p}_1$  von  $p_1$  mit  $\tilde{p}_1(y_1) = y_2$  und ein Lift  $\tilde{p}_2$  von  $p_2$  mit  $\tilde{p}_2(y_2) = y_1$ . Insbesondere ist  $\tilde{p}_2 \circ \tilde{p}_1(y_1) = y_1$ . Da sowohl  $\text{id} : E_1 \rightarrow E_1$  als auch  $\tilde{p}_2 \circ \tilde{p}_1 : E_1 \rightarrow E_1$  Lifte von  $p_1 : E_1 \rightarrow X$  nach  $E_1$  sind, die in  $y_1$  übereinstimmen, folgt:  $\tilde{p}_2 \circ \tilde{p}_1 = \text{id}|_{E_1}$ . Genauso folgt:  $\tilde{p}_1 \circ \tilde{p}_2 = \text{id}|_{E_2}$ .  $\square$

**Korollar 5.2.8.** Ist  $p : E \rightarrow X$  eine universelle Überlagerung und  $X$  einfach zusammenhängend, so ist  $p$  ein Homöomorphismus.

*Beweis.* Setze im obigen Satz für  $p_1 = p$  und für  $p_2 = \text{id} : X \rightarrow X$ . Dann besagt dieser Satz:  $\tilde{p}_1 = p$  ist ein Homöomorphismus.  $\square$

### 5.3 Decktransformationen und Fundamentalgruppe

Ein wichtiger Begriff ist der Begriff der Decktransformationsgruppe.

**Definition 5.3.1.** Sei  $p : E \rightarrow X$  eine Überlagerung. Dann heißt

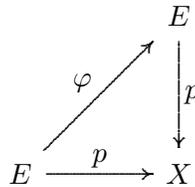
$$\Gamma = \{ \varphi : E \rightarrow E \mid \varphi \text{ Homöomorphismus mit } p \circ \varphi = p \}$$

Decktransformationsgruppe.

**Bemerkungen.** (a)  $\Gamma$  ist eine Gruppe (Untergruppe der Homöomorphismen auf  $E$ ).

Denn sind  $\varphi_1, \varphi_2 \in \Gamma$  so ist  $p \circ \varphi_1 \circ \varphi_2 = p \circ \varphi_2 = p$  und somit ist  $\varphi_1 \circ \varphi_2 \in \Gamma$ . Ist  $\varphi \in \Gamma$  so ist  $p \circ \varphi^{-1} = p \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = p$  und somit auch  $\varphi^{-1} \in \Gamma$ .

(b) Die Elemente von  $\Gamma$  sind per Definitionem Lifte von  $p$ , denn das Diagramm



kommutiert.

(c)  $\Gamma$  operiert fixpunktfrei auf  $E$ , denn ist  $\varphi y = y$ , so ist  $\varphi = \text{id}$  wegen der Eindeutigkeit des Lifts.

- (d) Sei  $E$  einfach zusammenhängend, so operiert  $\Gamma$  *einfach transitiv* auf den Fasern von  $p$ , d.h. für jedes  $x_0 \in X$  und  $y, y' \in p^{-1}(x_0)$  existiert genau ein  $\varphi \in \Gamma$  mit  $\varphi(y) = y'$ . Denn wegen Korollar 5.2.5 existiert genau ein Lift  $\varphi$  von  $p$  mit  $\varphi(y) = y'$ . Dann ist  $\varphi$  auch ein Homöomorphismus und somit  $\varphi \in \Gamma$ , denn es existiert auch ein Lift  $\psi$  von  $p$  mit  $\psi(y') = y$ . Also ist  $\psi \circ \varphi(y) = y$  und da  $p \circ \psi \circ \varphi = p$  ist  $\psi \circ \varphi = \text{id}$ . Genauso folgt  $\varphi \circ \psi = \text{id}$ . Überlagerungen, für die die Gruppe der Decktransformationen transitiv auf den Fasern operiert, nennt man *galoisch*.

Nun wollen wir eine Abbildung zwischen der Decktransformationsgruppe einer universellen Überlagerung und der Fundamentalgruppe des zugehörigen Basisraumes konstruieren. Sei  $p : E \rightarrow X$  universelle Überlagerung, d.h.  $E$  ist einfach zusammenhängend. Sei  $\pi_1(X, x_0)$  die Fundamentalgruppe von  $X$  mit Basispunkt  $x_0$ . Wähle  $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ .

Sei  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  Repräsentant von  $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$  und bezeichne mit  $\tilde{\alpha}_{y_0} : [0, 1] \rightarrow E$  den eindeutig bestimmten Lift von  $\alpha$  mit  $\tilde{\alpha}_{y_0}(0) = y_0$ . Da  $E$  einfach zusammenhängend, existiert wegen Bemerkung (d) genau ein  $\varphi \in \Gamma$  mit  $\varphi(y_0) = \tilde{\alpha}_{y_0}(1)$  (siehe Abbildung 5.10). Dabei hängt  $\tilde{\alpha}_{y_0}(1)$  nicht von der Wahl des Repräsentanten in  $[\alpha]$  ab. Denn jeder andere

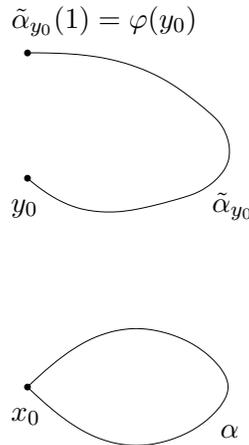


Abbildung 5.10:

Repräsentant  $\beta$  ist homotop zu  $\alpha$  und da  $\tilde{\alpha}_{y_0}(0) = \tilde{\beta}_{y_0}(0) = y_0$  ist wegen Satz 5.2.2 auch  $\tilde{\alpha}_{y_0}(1) = \tilde{\beta}_{y_0}(1)$ . Insbesondere hängt  $\varphi = \varphi_{[\alpha]}$  nur von dem Element der Fundamentalgruppe  $[\alpha]$  ab.

**Satz 5.3.2.** Sei  $p : E \rightarrow X$  Überlagerung und  $E$  einfach zusammenhängend. Sei  $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ , so ist die Abbildung

$$D : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \Gamma$$

mit  $D[\alpha] = \varphi_{[\alpha]}$  ein Gruppenisomorphismus. Dabei ist  $\varphi_{[\alpha]} \in \Gamma$  die eindeutig bestimmte Decktransformation mit  $\varphi_{[\alpha]}(y_0) = \tilde{\alpha}_{y_0}(1)$ .

*Beweis.* (1)  $D$  ist ein Homomorphismus. Zunächst ist

$$D([\alpha] \cdot [\beta]) = D[\alpha] \circ D[\beta]$$

äquivalent zu

$$\varphi_{[\alpha][\beta]}(y_0) = \varphi_{[\alpha]} \circ \varphi_{[\beta]}(y_0),$$

denn beide Seiten sind Decktransformationen und stimmen überein, wenn sie in einem Punkt übereinstimmen. Die letzte Gleichung ist eine Konsequenz der folgenden Rechnung,

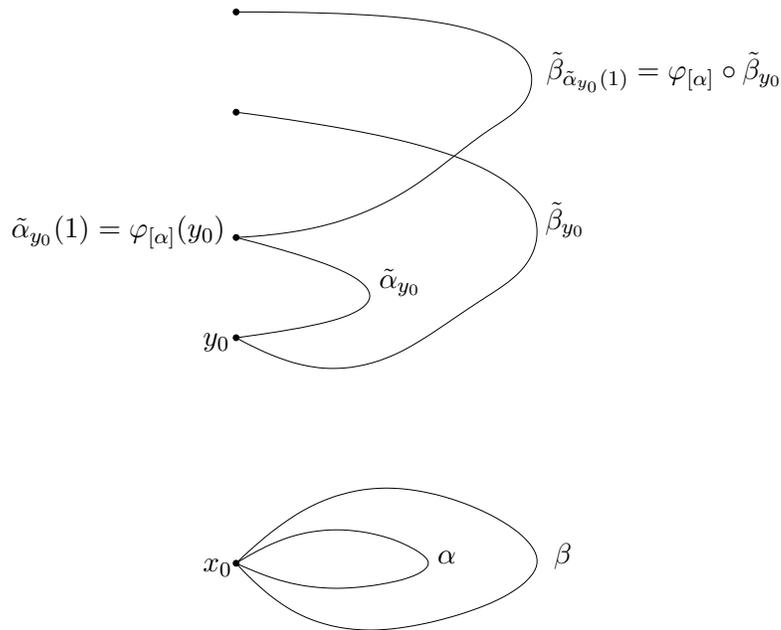


Abbildung 5.11:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{[\alpha][\beta]}(y_0) &= \varphi_{[\alpha*\beta]}(y_0) = \widetilde{(\alpha * \beta)}_{y_0}(1) \\
 &= \tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}_{y_0}(1)}(1) = \tilde{\beta}_{\varphi_{[\alpha]}(y_0)}(1) \\
 &\stackrel{(1)}{=} \varphi_{[\alpha]} \circ \tilde{\beta}_{y_0}(1) = \varphi_{[\alpha]} \circ \varphi_{[\beta]}(y_0).
 \end{aligned}$$

Dabei gilt (1), da  $\varphi_{[\alpha]} \circ \tilde{\beta}_{y_0}$  ein Lift von  $\beta$  mit  $\varphi_{[\alpha]} \circ \tilde{\beta}_{y_0}(0) = \varphi_{[\alpha]}(y_0)$  ist (siehe Abbildung 5.11).

- (2)  $\ker(D) = \{1\}$ , wobei 1 das neutrale Element der Fundamentalgruppe bezeichnet. Denn ist  $\varphi_{[\alpha]} = \text{id}$ , so folgt:  $\tilde{\alpha}_{y_0}(1) = y_0$ . Da  $E$  einfach zusammenhängend ist, ist  $\tilde{\alpha}_{y_0}$  nullhomotop und somit  $p \circ \tilde{\alpha}_{y_0} = \alpha$  nullhomotop (stetige Abbildungen bilden nullhomotope in nullhomotope Kurven ab), d.h.  $[\alpha] = 1$ .
- (3)  $D$  ist surjektiv, denn ist  $\gamma \in \Gamma$  und  $\gamma y_0 = y_1$ , so wähle eine Kurve  $\tilde{\alpha} : [0, 1] \rightarrow E$  mit  $\tilde{\alpha}(0) = y_0$  und  $\tilde{\alpha}(1) = y_1$ . Dann ist  $\alpha = p \circ \tilde{\alpha}$  eine geschlossene Kurve mit  $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$ . Also ist  $\varphi_{[\alpha]} = \gamma$ .

□

**Korollar 5.3.3.** Ist  $p : E \rightarrow X$  universelle Überlagerung und  $\Gamma$  die Gruppe der Decktransformationen, so ist  $X = E/\Gamma$  und  $\pi_1(X, x_0) \cong \Gamma$ .

*Beweis.* Die Projektion  $p : E \rightarrow X$  induziert auf  $E$  eine Äquivalenzrelation  $\sim$  durch  $y_1 \sim y_2$  genau dann, wenn  $p(y_1) = p(y_2)$ . Dann ist  $\bar{p} : E/\sim \rightarrow X$  mit  $\bar{p}([x]) = p(x)$  ein Homöomorphismus, falls  $E/\sim$  die Quotiententopologie trägt. Da  $\Gamma$  wegen Bemerkung (d) einfach transitiv auf den Fasern von  $p$  operiert gilt  $y_1 \sim y_2$  genau dann, falls ein  $\gamma \in \Gamma$  existiert mit  $\gamma(y_1) = y_2$ . Damit ist  $E/\sim = E/\Gamma$  homöomorph zu  $X$  und wegen Satz 5.3.2 ist  $\pi_1(X, x_0)$  isomorph zu  $\Gamma$ .  $\square$

**Bemerkung.** Vernünftige topologische Räume besitzen eine universelle Überlagerung. Eine hinreichende Bedingung ist, dass der topologische Raum zusammenhängend, lokal wegweise zusammenhängend und *semilokal einfach zusammenhängend* ist. Die letzte Bedingung bedeutet, dass jeder Punkt eine Umgebung besitzt, sodass jede Kurve in dieser Umgebung homotop zur Punktcurve ist. Dabei muss die Homotopie nicht in der Umgebung verlaufen, d.h. der Raum muss nicht lokal einfach zusammenhängend sein. Zusammenhängende Mannigfaltigkeiten erfüllen alle diese Bedingungen und besitzen daher eine universelle Überlagerung.

**Beispiele.** Die zu Beginn des Abschnittes 5.1 betrachteten Überlagerungen

$$p : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n = S^n/\Gamma$$

mit

$$\Gamma = \{1, -1\} \cong \mathbb{Z}_2$$

und

$$p : \mathbb{R}^n \rightarrow T^n = \mathbb{R}^n/\Gamma$$

mit

$$\Gamma = \{\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) = x + a, a \in \mathbb{Z}^n\}$$

sind universell. Insbesondere folgt:  $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}_2$  und  $\pi_1(T^n) \cong \mathbb{Z}^n$ .

Folgende wichtige Strukturen lassen sich auf die universelle Überlagerung liften.

**Satz 5.3.4.** *Sei  $p : E \rightarrow X$  universelle Überlagerung, so gilt:*

- (a) *Ist  $X$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, so existiert genau eine differenzierbare Struktur auf  $E$ , so dass  $p : E \rightarrow X$  ein lokaler Diffeomorphismus ist. Dann ist  $\Gamma$  Untergruppe der Diffeomorphismengruppe von  $E$ .*
- (b) *Ist  $X$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, so existiert genau eine Riemannsche Metrik auf  $E$ , so dass  $p : E \rightarrow X$  eine lokale Isometrie ist. Dann ist  $\Gamma$  Untergruppe der Isometriegruppe von  $E$ . Ist  $X$  vollständig, so auch  $E$ , denn der Lift einer Geodätischen in  $X$  ist eine Geodätische in  $E$ .*
- (c) *Sei  $X$  eine Liegruppe, so existiert genau eine Liegruppenstruktur auf  $E$ , so dass  $p : E \rightarrow X$  differenzierbarer Gruppenhomomorphismus ist. Dann ist  $\Gamma$  Untergruppe der Automorphismengruppe von  $E$ .*

Nun wollen wir uns mit Anwendungen dieser Theorie auf die Riemannsche Geometrie beschäftigen.

### 5.4 Anwendungen in der Riemannschen Geometrie

**Satz 5.4.1.** (Verallgemeinerung von Bonnet-Myers)

Sei  $M$  eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$  mit

$$\text{ric} \geq \frac{n-1}{r^2}$$

für ein  $r > 0$ . Ist  $\widetilde{M}$  die universelle Überlagerung mit der gelifteten Metrik, so ist  $\text{diam } \widetilde{M} \leq \pi r$ . Insbesondere ist  $\widetilde{M}$  kompakt und die Fundamentalgruppe von  $M$  ist endlich.

*Beweis.* Da die Überlagerungsabbildung  $p : \widetilde{M} \rightarrow M$  wegen Satz 5.3.4 bezüglich der gelifteten Metrik eine lokale Isometrie ist, folgt auch  $\text{ric}_{\widetilde{M}} \geq \frac{n-1}{r^2}$ . Darüberhinaus ist  $\widetilde{M}$  vollständig und aus dem Satz 4.4.1 von Bonnet-Myers folgt  $\text{diam } \widetilde{M} \leq \pi r$  und somit die Kompaktheit von  $\widetilde{M}$ . Da die Fasern von  $p$  diskret sind, ist daher  $p^{-1}(x_0)$  endlich für ein  $x_0 \in M$ .

Ist  $y_0 \in p^{-1}(x_0)$  so existiert zu jedem  $y \in p^{-1}(x_0)$  genau ein  $\gamma \in \Gamma$  mit  $\gamma x_0 = y$ . Also stimmt die Anzahl der Elemente in  $\Gamma$  mit der von  $p^{-1}(x_0)$  überein. Insbesondere ist  $\pi_1(M, x_0) \cong \Gamma$  endlich. □

**Bemerkung.** Insbesondere kann auf dem Torus  $T^n$  keine Metrik mit positiver Ricci-Krümmung existieren. Denn die Fundamentalgruppe von  $T^n$  ist die nicht endliche Gruppe  $\mathbb{Z}^n$ .

Nun wollen wir beweisen, dass unter gewissen Voraussetzungen eine lokale Isometrie eine Überlagerung ist.

**Satz 5.4.2.** Seien  $N$  und  $M$  zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $\varphi : N \rightarrow M$  eine lokale Isometrie. Ist  $N$  vollständig so ist auch  $M$  vollständig und  $\varphi$  eine Überlagerung.

*Beweis.* Den Beweis werden wir in folgende Schritte unterteilen.

Schritt 1:  $\varphi$  kommutiert mit den Exponentialabbildungen auf  $N$  und  $M$ , d.h. für alle  $q \in N$  gilt

$$\exp_{\varphi(q)}^M \circ D\varphi(q) = \varphi \circ \exp_q^N : T_q N \rightarrow M \tag{5.1}$$

Zum Beweis von (5.1) (siehe Abbildung 5.12)

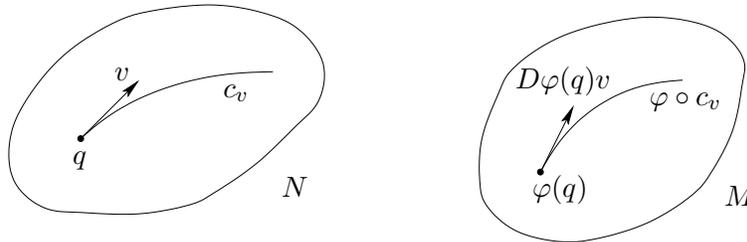


Abbildung 5.12:

betrachte die wegen der Vollständigkeit von  $N$  existierende Geodätische  $c_v : \mathbb{R} \rightarrow N$  mit  $\dot{c}_v(0) = v \in T_q N$ . Dann ist  $\varphi \circ c_v : \mathbb{R} \rightarrow M$  die Geodätische mit  $\widehat{\varphi \circ c_v}(0) = D\varphi(q)v \in T_{\varphi(q)} M$ . Also gilt

$$\varphi \circ \exp_q^N(v) = \varphi \circ c_v(1) = c_{D\varphi(q)v}(1) = \exp_{\varphi(q)}^M(D\varphi(q)v).$$

Da  $M$  vollständig und  $D\varphi(q)$  invertierbar ist, existiert die Exponentialabbildung  $\exp_{\varphi(q)}^M$  auf  $T_{\varphi(q)}M$  und somit ist  $M$  wegen des ersten Teils des Satzes von Hopf-Rinow vollständig. Außerdem ist  $\exp_{\varphi(q)}^M$  surjektiv. Die Surjektivität von  $\varphi$  folgt somit aus (5.1).

Schritt 2: Ist  $\exp_p^M : B(0_p, \epsilon) \rightarrow B(p, \epsilon)$  ein Diffeomorphismus, so ist  $B(p, \epsilon)$  eine Elementarumgebung, denn für alle  $q \in \varphi^{-1}(p)$  gilt:

- (a)  $\varphi : B(q, \epsilon) \rightarrow B(p, \epsilon)$  ist eine Isometrie.
- (b)  $\varphi^{-1}B(p, \epsilon) = \dot{\bigcup}_{q \in \varphi^{-1}(p)} B(q, \epsilon)$  („ $\dot{\bigcup}$ “ bedeutet, dass die Vereinigung disjunkt ist).

zu (a): Aus (5.1) folgt:  $\exp_p^M \circ D\varphi(q) = \varphi \circ \exp_q^N$ . Die linke Seite dieser Gleichung eingeschränkt auf  $B(0_q, \epsilon)$  ist ein Diffeomorphismus da  $D\varphi(q) : B(0_q, \epsilon) \rightarrow B(0_p, \epsilon)$  eine lineare Isometrie ist. Also ist auch ist

$$\varphi \circ \exp_q^N : B(0_q, \epsilon) \rightarrow B(p, \epsilon)$$

ein Diffeomorphismus. Die Anwendung der Kettenregel auf  $\varphi \circ \exp_q^N$  impliziert, dass  $D\exp_q^N(w)$  für alle  $w \in B(0_q, \epsilon)$  invertierbar ist. Außerdem ist  $\exp_q^N$  auf  $B(0_q, \epsilon)$  injektiv und somit  $\exp_q^N : B(0_q, \epsilon) \rightarrow \exp_q(B(0_q, \epsilon))$  ein Diffeomorphismus. Wegen Satz 3.2.7 ist  $\exp_q(B(0_q, \epsilon)) = B(q, \epsilon)$ . Also ist  $\varphi : B(q, \epsilon) \rightarrow B(p, \epsilon)$  ein Diffeomorphismus und somit auch eine Isometrie.

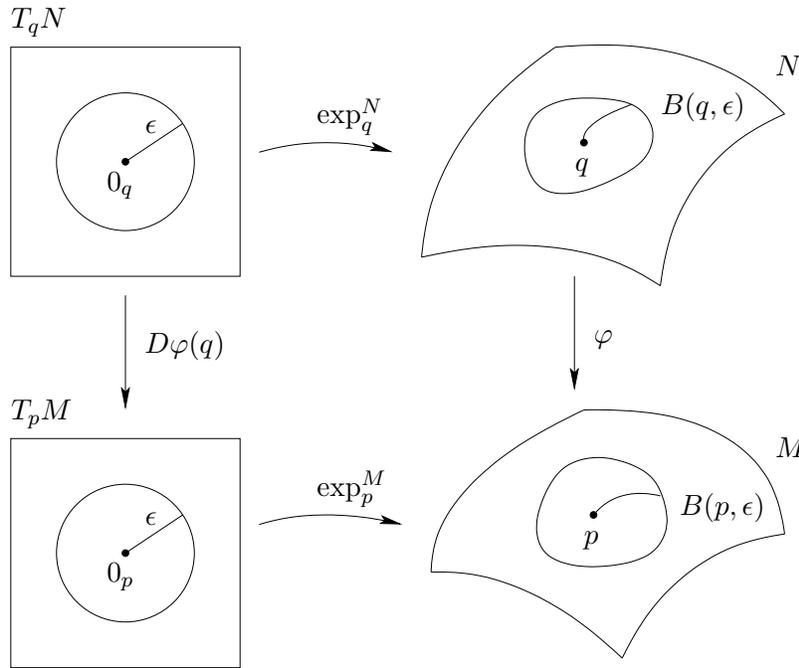


Abbildung 5.13:

zu (b): Zu zeigen ist:  $\varphi^{-1}B(p, \epsilon) = \dot{\bigcup}_{q \in \varphi^{-1}(p)} B(q, \epsilon)$ .

Die Inklusion „ $\supset$ “ folgt wegen  $\varphi(B(q, \epsilon)) \subset B(p, \epsilon)$  für alle  $q \in \varphi^{-1}(p)$ . Nun zeigen

wir die Inklusion „ $\subset$ “.

Sei  $q' \in \varphi^{-1}B(p, \epsilon)$ . Dann ist  $p' := \varphi(q') \in B(p, \epsilon)$ . Sei  $c : [0, 1] \rightarrow M$  eine minimale Geodätische mit  $c(0) = \varphi(q') = p'$  und  $c(1) = p$  und  $\tilde{c} : [0, 1] \rightarrow N$  die Geodätische

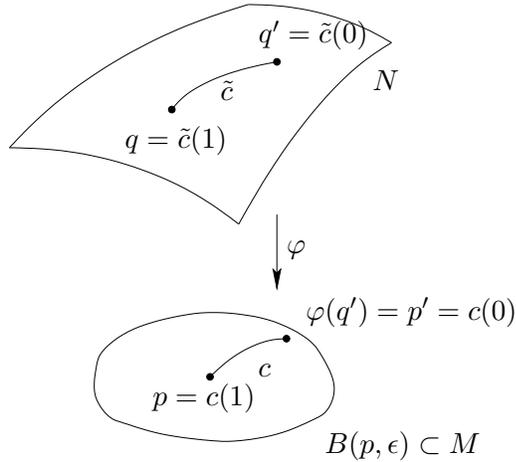


Abbildung 5.14:

mit  $\tilde{c}(0) = q'$  und  $\varphi \circ \tilde{c} = c$  ( $\tilde{c}$  existiert, da  $\varphi$  eine lokale Isometrie und  $N$  vollständig ist). Insbesondere ist  $q := \tilde{c}(1) \in \varphi^{-1}(p)$  und da

$$d(q', q) \leq L(\tilde{c}) = L(\varphi \circ \tilde{c}) = L(c) < \epsilon$$

ist  $q' \in B(q, \epsilon)$ .

Nun zeigen wir: Ist  $q_1, q_2 \in \varphi^{-1}(p)$  und  $q_1 \neq q_2$ , so ist  $B(q_1, \epsilon) \cap B(q_2, \epsilon) = \emptyset$ . Wäre  $B(q_1, \epsilon) \cap B(q_2, \epsilon) \neq \emptyset$ , so folgt aus der Dreiecksungleichung:  $d(q_1, q_2) < 2\epsilon$ . Sei  $c : [0, 1] \rightarrow N$  minimale Geodätische mit  $c(0) = q_1$  und  $c(1) = q_2$ . Dann ist  $\varphi \circ c$  geodätische Schleife in  $M$  mit  $\varphi \circ c(0) = \varphi \circ c(1) = p$  und  $L(\varphi \circ c) < 2\epsilon$ . Damit folgt  $\varphi \circ c[0, 1] \subset B(p, \epsilon)$  und somit existiert eine geodätische Schleife in  $B(p, \epsilon)$ . Auf der anderen Seite ist  $\exp_p : B(0_p, \epsilon) \rightarrow B(p, \epsilon)$  ein Diffeomorphismus. Dies schließt aber die Existenz einer solchen Geodätischen aus und wir erhalten einen Widerspruch zur Annahme.

□

**Bemerkung.** Sind  $N$  und  $M$  kompakte Mannigfaltigkeiten und  $\varphi : N \rightarrow M$  ein lokaler Diffeomorphismus, so ist  $\varphi : N \rightarrow M$  eine Überlagerung. Zum Beweis wähle eine Riemannsche Metrik auf  $M$  und ziehe sie mit  $\varphi$  auf  $N$  zurück. Damit wird  $\varphi$  zu einer lokalen Isometrie, und da wegen der Kompaktheit der Mannigfaltigkeiten beide Metriken vollständig sind, ist  $\varphi$  eine Überlagerung.

Eine wichtige Anwendung dieses Satzes ist der Satz von Hadamard-Cartan.

**Satz 5.4.3.** (Hadamard-Cartan)

Sei  $(M, g)$  eine vollständige zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit ohne konjugierte Punkte. Dann folgt:

- (a) Für alle  $p \in M$  ist die Exponentialabbildung  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$  eine Überlagerung. Da  $T_p M$  als Vektorraum einfach zusammenhängend ist, ist diese Überlagerung universell. Insbesondere hat  $M$  die Darstellung  $M = \widetilde{M}/\Gamma$ . Die Mannigfaltigkeit  $\widetilde{M}$  ist diffeomorph zum  $\mathbb{R}^n$  und die Gruppe der Decktransformationen  $\Gamma$  ist isomorph zu der Fundamentalgruppe  $\pi_1(M, x_0)$ .
- (b) Ist  $M$  einfach zusammenhängend, so ist  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$  ein Diffeomorphismus. Insbesondere lassen sich je 2 Punkte durch genau eine Geodätische verbinden.

*Beweis.* (a) Wegen der Vollständigkeit von  $M$  ist  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$  surjektiv und da  $M$  keine konjugierten Punkte hat, ist wegen Korollar 4.5.6 für alle  $v \in T_p M$  das Differential  $D \exp_p(v)$  invertierbar. Also ist  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$  ein lokaler Diffeomorphismus. Betrachte auf  $T_p M$  die mittels  $\exp_p$  zurückgeholte Metrik, d.h.

$$\langle w_1, w_2 \rangle_v := \exp_p^* g(w_1, w_2) = g(D \exp_p(v)w_1, D \exp_p(v)w_2)$$

für alle  $w_1, w_2 \in T_v T_p M \cong T_p M$ . Damit wird  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$  zu einer lokalen Isometrie.

Auf der Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(T_p M, \exp_p^* g)$  sind die Geraden durch  $0_p$  Geodätische, denn  $\exp_p$  ist eine lokale Isometrie und bildet die Geraden durch  $0_p$  auf Geodätische in  $M$  ab. Nach dem Satz von Hopf-Rinow 3.3.3 ist damit  $(T_p M, \exp_p^* g)$  vollständig. Wegen Satz 5.4.2 ist somit  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$  eine Überlagerung. Da  $T_p M$  einfach zusammenhängend ist, ist es die universelle Überlagerung.

- (b) Ist  $M$  einfach zusammenhängend, so ist wegen Korollar 5.2.8  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$  ein Homöomorphismus. Da darüberhinaus  $\exp_p$  auch ein lokaler Diffeomorphismus ist, sind  $\exp_p$  sowie  $\exp_p^{-1}$  differenzierbar und  $\exp_p$  somit ein Diffeomorphismus. □

**Bemerkung.** (a) Besitzen die Geodätischen durch einen festen Punkt  $p \in M$  keine konjugierten Punkte, so ist wie der obige Beweis zeigt  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$  schon eine Überlagerung. Ein solcher Punkt heißt *Pol*. Insbesondere besitzen also Sphären mit einer beliebigen Metrik keine Pole.

- (b) Eine wichtige Klasse von Mannigfaltigkeiten ohne konjugierte Punkte sind die mit nicht positiver Schnittkrümmung ( $K \leq 0$ ). Sind sie vollständig, so lässt sich damit der Satz 5.4.3 von Hadamard-Cartan auf sie anwenden.

**Definition 5.4.4.** Eine vollständige einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  mit  $K \leq 0$  heißt Hadamardmannigfaltigkeit.

**Bemerkung.** Wegen Satz 5.4.3 ist jede Hadamardmannigfaltigkeit diffeomorph zum  $\mathbb{R}^n$ . Die universelle Überlagerung einer Mannigfaltigkeit mit  $K \leq 0$  ist eine Hadamardmannigfaltigkeit.

## 5.5 Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung

In den bisherigen Sätzen haben wir gesehen, welchen Einfluss obere oder untere Krümmungsschranken auf die globale Gestalt vollständiger Riemannscher Mannigfaltigkeiten haben. Desweiteren folgt aus den bisherigen Abschnitten dieses Kapitels, dass wir jeder Mannigfaltigkeit

$M$  genau eine einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit  $\widetilde{M}$  zuordnen können, so dass  $M$  sich als Quotientenraum  $\widetilde{M}/\Gamma$  darstellen lässt. Dabei ist  $\Gamma$  die Gruppe der Decktransformationen, die als diskrete Gruppe eigentlich und fixpunktfrei auf  $M$  operiert. Als Gruppe ist sie isomorph zur Fundamentalgruppe  $\pi_1(M)$  von  $M$ . Ist  $p : \widetilde{M} \rightarrow M$  die Überlagerungsabbildung,  $g$  eine Riemannsche Metrik auf  $M$  und wählen wir auf  $\widetilde{M}$  die geliftete Metrik  $\tilde{g} = p^*(g)$ , so gilt :

- $p : (\widetilde{M}, \tilde{g}) \rightarrow (M, g)$  ist eine lokale Isometrie. Ist  $(M, g)$  vollständig, so auch  $(\widetilde{M}, \tilde{g})$ .
- $\Gamma$  operiert isometrisch auf  $M$ .

Wir wollen uns nun mit einer speziellen Klasse vollständiger Riemannscher Mannigfaltigkeiten beschäftigen, nämlich solche mit konstanter Schnittkrümmung. Sie werden auch *Raumformen* genannt. Hat  $(M, g)$  konstante Krümmung, so auch  $(\widetilde{M}, \tilde{g})$ . Ihre Klassifikation kann daher und wegen obigen Überlegungen in zwei Schritten erfolgen.

1. Klassifikation (bis auf Isometrie) der einfach zusammenhängenden Riemannschen Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung.
2. Klassifikation aller diskreten Gruppen die eigentlich, fixpunktfrei und isometrisch auf den einfach zusammenhängenden Riemannschen Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung operieren.

Wir werden uns nur mit der ersten Aufgabe beschäftigen, die eine vollständige Lösung besitzt. Die Klassifikation der Gruppen ist ab Dimension drei im Falle konstanter negativer Krümmung ein schwieriges und bisher ungelöstes Problem. Im Falle konstanter positiver Krümmung ist  $\Gamma$  endlich. Eine Klassifikation ist in den sechziger Jahren gelungen.

Wir wollen nun die einfach zusammenhängenden, vollständigen Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung bis auf Isometrie klassifizieren. Dabei genügt es, die Fälle mit Schnittkrümmung  $0, +1, -1$  zu betrachten. Denn ist  $g$  eine Riemannsche Metrik mit Krümmung  $K$ , so hat die mit  $c > 0$  reskalierte Metrik  $g_1 := cg$  die Krümmung  $K_1 = \frac{1}{c}K$ . Die Standardmodelle solcher Mannigfaltigkeiten kennen wir natürlich schon. Es sind die klassischen euklidischen, sphärischen und hyperbolischen Geometrien, die wir nochmals kurz auflisten.

- (1) Euklidische Geometrie:

$$(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle), \text{ wobei } \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

$\mathbb{R}^n$  hat konstante Krümmung  $K = 0$ .

- (2) Sphärische Geometrie:

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

mit der durch  $\mathbb{R}^{n+1}$  induzierten Metrik.  $S^n$  hat konstante Krümmung  $K = +1$ .

- (3) Hyperbolische Geometrie.

Wie in Kapitel 2 dargestellt ist, existieren verschiedene gebräuchliche Modelle, die alle zueinander isometrisch sind.

(a) Halbraummodell

$$\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}, \text{ mit } g_x(v, w) = \frac{\langle v, w \rangle}{x_n^2}$$

Diese Metrik ist konform äquivalent zur euklidischen Metrik und hat Krümmung  $K = -1$ . Ihre Geodätischen sind Halbkreise und Geraden senkrecht zu  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$ .

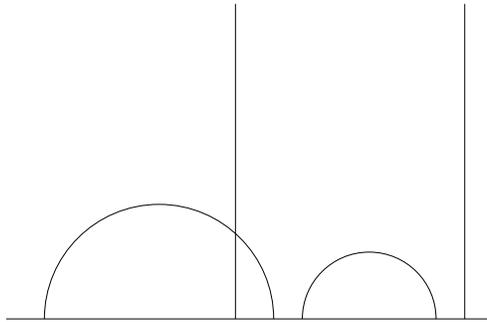


Abbildung 5.15:

(b) Ballmodell (Poincaré-Modell)

$$B^n(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, x \rangle < 1\}, \text{ mit } g_x(v, w) = \frac{4\langle v, w \rangle}{(1 - \|x\|^2)^2}$$

Ihre Geodätischen sind Halbkreise senkrecht zu  $\partial B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|^2 = 1\}$ .

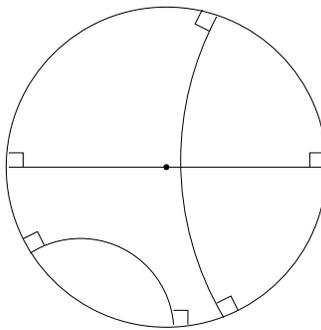


Abbildung 5.16:

(c) Hyperboloidmodell

Der  $n$  dimensionale hyperbolische Raum läßt sich im Unterschied zur Sphäre nicht isometrisch in  $\mathbb{R}^{n+1}$  einbetten. Wenn man aber anstatt der euklidischen Metrik die Lorentzmetrik nimmt, ist dies möglich.

Definiere für  $x \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$q(x, x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2.$$

Betrachte die Hyperfläche

$$H^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid q(x, x) = -1, x_{n+1} > 0\}$$

und die auf  $H^n$  durch  $q$  induzierte Metrik (siehe Kapitel 2 Abschnitt 1). Diese Metrik ist positiv definit, denn die Tangentialvektoren von  $\mathbb{H}_{-1}^n$  liegen in der Menge  $\{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid q(v, v) > 0\}$ .

**Bemerkung.** Denkbar sind noch viele andere Modelle dieser Geometrien. Denn ist  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $\phi : N \rightarrow M$  ein Diffeomorphismus und  $\phi^*g_x(v, w) = g(D\phi(x)v, D\phi(x)w)$  die durch  $\phi$  zurückgeholte Metrik, so ist  $\phi$  per Definition eine Isometrie. Hat also  $(M, g)$  konstante Krümmung, so auch  $(N, \phi^*g)$ .

Wir wollen nun zeigen, dass alle Mannigfaltigkeiten der Krümmung 0, 1 oder  $-1$  lokal isometrisch zu diesen Standardgeometrien ist. Um Isometrien zu konstruieren sollten wir uns zunächst ein Bild davon machen wie solche Isometrien aussehen müssen. Dazu ist das folgende einfache aber nützliche Lemma.

**Lemma 5.5.1.** *Seien  $(M_1, g_1)$  und  $(M_2, g_2)$  zwei Riemannsche Mannigfaltigkeiten (nicht notwendigerweise vollständig),  $U$  eine offene Teilmenge in  $M_1$  und  $\varphi : U \rightarrow M_2$  eine lokale Isometrie. Sei  $p_1 \in U$ ,  $\varphi(p_1) = p_2$  und  $r > 0$ , so dass  $\exp_{p_1} : B(0_{p_1}, r) \rightarrow B(p_1, r) \subset U$  ein Diffeomorphismus ist und  $\exp_{p_2}$  auf  $B(0_{p_2}, r)$  definiert ist. Ist  $I : T_{p_1}M_1 \rightarrow T_{p_2}M_2$  die lineare Isometrie mit  $D\varphi(p_1) = I$ , so gilt*

$$\varphi(x) = \exp_{p_2} \circ I \circ \exp_{p_1}^{-1}(x) \quad (5.2)$$

für alle  $x \in B(p_1, r)$ . Insbesondere ist  $\varphi$  auf  $B(p_1, r)$  durch  $\varphi(p_1)$  und  $D\varphi(p_1)$  bestimmt.

*Beweis.* Da lokale Isometrien Geodätische auf Geodätische abbilden, gilt für alle  $v \in T_{p_1}M_1$  und Geodätische  $c_v$  mit  $\dot{c}_v(0) = v$ :

$$\varphi(c_v(t)) = c_{D\varphi(p_1)(v)}(t).$$

Werten wir dies in  $t = 1$  aus, so erhalten wir

$$\varphi \circ \exp_{p_1}(v) = \exp_{p_2} \circ I(v).$$

Da  $\exp_{p_1} : B(0_{p_1}, r) \rightarrow B(p_1, r)$  nach Voraussetzung ein Diffeomorphismus ist, folgt (5.2).  $\square$

**Bemerkung.** Insbesondere sind lokale Isometrien zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten automatisch unendlich oft differenzierbar bzw. analytisch, falls die Riemannschen Mannigfaltigkeiten unendlich oft differenzierbar bzw. analytisch sind.

Die Eindeutigkeitsaussage ist auf ganz  $U$  gegeben, falls  $U$  zusammenhängend ist. Genauer gilt:

**Korollar 5.5.2.** *Seien  $(M_1, g_1)$  und  $(M_2, g_2)$  zwei Riemannsche Mannigfaltigkeiten und  $U$  eine offene zusammenhängende Teilmenge von  $M_1$ . Sind  $\varphi, \psi : U \rightarrow M_2$  zwei lokale Isometrien und existiert ein  $p \in U$  mit  $\varphi(p) = \psi(p)$  und  $D\varphi(p) = D\psi(p)$  so gilt  $\varphi(q) = \psi(q)$  für alle  $q \in U$ .*

*Beweis.* Betrachte die Menge

$$A := \{q \in U \mid \varphi(q) = \psi(q) \text{ und } D\varphi(q) = D\psi(q)\}.$$

Wegen der stetigen Differenzierbarkeit von  $\varphi$  und  $\psi$  ist diese Menge abgeschlossen in  $U$ . Wegen Lemma 5.5.1 ist sie aber auch offen in  $U$ . Da nach Voraussetzung die Menge  $A$  nicht leer ist und  $U$  zusammenhängend ist, ist  $\varphi(q) = \psi(q)$  für alle  $q \in U$ .  $\square$

Nun wollen wir entscheiden, wann eine Abbildung der Form  $\varphi : B(p_1, r) \rightarrow M_2$  mit  $\varphi(x) = \exp_{p_2} \circ I \circ \exp_{p_1}^{-1}(x)$  zu einer gegebenen linearen Isometrie  $I : T_{p_1}M_1 \rightarrow T_{p_2}M_2$  eine lokale Isometrie darstellt. Eine notwendige und hinreichende Bedingung lässt sich mit Hilfe von Jacobifelder längs radialer Geodätischer angeben. Da Jacobifelder Lösungen linearer Differentialgleichungen sind, deren Koeffizienten der Krümmungstensor bestimmt, wird dadurch das Problem der Auffindung von Isometrien zugänglicher. Ist  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, so bezeichne für gegebene Vektoren  $v, w \in T_pM$ ,  $v \neq 0$  mit  $J_{v,w}$  das eindeutig bestimmte Jacobifeld längs der Geodätischen  $c_v$  mit den Anfangswerten  $J_{v,w}(0) = 0$  und  $\frac{D}{dt}J_{v,w}(0) = w$ .

**Lemma 5.5.3.** *Seien  $(M_1, g_1)$  und  $(M_2, g_2)$  zwei Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Seien  $p_1 \in M_1$ ,  $p_2 \in M_2$  und  $r > 0$ , so dass  $\exp_{p_1} : B(0_{p_1}, r) \rightarrow B(p_1, r)$  ein Diffeomorphismus ist und  $\exp_{p_2}$  auf  $B(0_{p_2}, r)$  definiert ist. Wähle eine lineare Isometrie  $I : T_{p_1}M_1 \rightarrow T_{p_2}M_2$  und betrachte die Abbildung  $\varphi : B(p_1, r) \rightarrow M_2$  mit  $\varphi(x) = \exp_{p_2} \circ I \circ \exp_{p_1}^{-1}(x)$ . Dann ist  $D\varphi(p_1) = I$  und für  $x = \exp_{p_1}(v) \neq p_1$  gilt*

$$D\varphi(x)(J_{v,w}(1)) = J_{Iv, Iw}(1).$$

*Ist insbesondere*

$$\|J_{v,w}(1)\|_{g_1} = \|J_{Iv, Iw}(1)\|_{g_2}$$

*für alle  $v \in B(0_{p_1}, r)$  und  $w \in T_{p_1}M_1$ , so ist  $\varphi : B(p_1, r) \rightarrow M_2$  eine lokale Isometrie.*

*Beweis.* Betrachte die Abbildung  $\varphi : B(p_1, r) \rightarrow M_2$  mit  $\varphi(x) = \exp_{p_2} \circ I \circ \exp_{p_1}^{-1}(x)$ . Dann folgt:

$$\varphi \circ \exp_{p_1}(v) = \exp_{p_2} \circ I(v)$$

für alle  $v \in B(0_{p_1}, r)$  und mit der Kettenregel erhalten wir:

$$D\varphi(\exp_{p_1}(v)) \circ D\exp_{p_1}(v) = D\exp_{p_2}(Iv) \circ I$$

Insbesondere für  $v = 0$  gilt:

$$D\varphi(p_1) = I$$

Für  $v \in B(0_{p_1}, r)$  mit  $v \neq 0$ ,  $w \in T_vT_{p_1}M_1 \cong T_{p_1}M_1$  und  $x = \exp_{p_1}(v) \in B(p_1, r)$  folgt:

$$D\varphi(x) \circ D\exp_{p_1}(v)(w) = D\exp_{p_2}(Iv)(Iw).$$

Wegen Satz 4.5.4 gilt  $D\exp_p(v)(w) = J_{v,w}(1)$  und somit

$$D\varphi(x)(J_{v,w}(1)) = J_{Iv, Iw}(1).$$

Da  $D\exp_{p_1}(v) : T_vT_{p_1}M_1 \rightarrow T_xM_1$  bijektiv ist, existiert für alle  $u \in T_xM_1$  ein  $w \in T_{p_1}M_1 \cong T_vT_{p_1}M_1$  mit  $u = J_{v,w}(1)$  und wir erhalten:

$$\|D\varphi(x)u\|_{g_2} = \|D\varphi(x)J_{v,w}(1)\|_{g_2} = \|J_{Iv, Iw}(1)\|_{g_2} = \|u\|_{g_1}.$$

falls

$$\|J_{v,w}(1)\|_{g_1} = \|J_{Iv,Iw}(1)\|_{g_2}.$$

Dann ist  $\varphi : B(p_1, \epsilon) \rightarrow B(p_2, \epsilon)$  eine lokale Isometrie.  $\square$

Wie wir sehen werden, läßt sich die Berechnung der Jacobifelder auf Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung  $\rho \in \mathbb{R}$  auf die Lösungen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  der linearen skalaren Differentialgleichung

$$f'' + \rho f = 0.$$

zurückführen. Die Lösung  $s_\rho$  mit den Anfangswerten  $s_\rho(0) = 0$  und  $s'_\rho(0) = 1$  ist durch

$$s_\rho(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\rho}} \sin \sqrt{\rho} t & \text{für } \rho > 0 \\ t & \text{für } \rho = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-\rho}} \sinh \sqrt{-\rho} t & \text{für } \rho < 0 \end{cases}$$

gegeben. Es gilt:

**Lemma 5.5.4.** *Sei  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  eine vollständige Mannigfaltigkeit mit konstanter Krümmung  $\rho$ . Sei  $v, w \in T_p M$  mit  $\|v\| = 1$ , so gilt*

$$J_{v,w}(t) = s_\rho(t) \cdot E(t) + t \cdot \langle v, w \rangle \dot{c}_v(t),$$

wobei  $E$  das parallele Vektorfeld längs  $c_v$  bezeichnet mit  $E(0) = w - \langle v, w \rangle v \perp v$ .

*Beweis.* Wir zeigen: Die Summanden  $J^\perp(t) = s_\rho(t) \cdot E(t) \perp \dot{c}_v(t)$  und  $J^T(t) = t \cdot \langle v, w \rangle \dot{c}_v(t)$  sind die orthogonalen und tangentialen Jacobifelder längs  $c_v$  mit  $J^\perp(0) = J^T(0) = 0$  sowie

$$\frac{D}{dt} J^\perp(0) = E(0) = w - \langle v, w \rangle v \quad \text{und} \quad \frac{D}{dt} J^T(0) = \langle v, w \rangle v$$

Dann definiert die rechte Seite das Jacobifeld mit den gewünschten Eigenschaften.

1. Für jede Geodätische  $c_v$  auf einer beliebigen Riemannschen Mannigfaltigkeit gilt: Für jedes  $a \in \mathbb{R}$  ist  $J(t) = ta\dot{c}_v(t)$  ein Jacobifeld längs  $c_v$ , denn  $\frac{D^2}{dt^2} J(t) = 0$  und

$$R(J(t), \dot{c}_v(t))\dot{c}_v(t) = taR(\dot{c}_v(t), \dot{c}_v(t))\dot{c}_v(t) = 0.$$

2. Ist  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit der konstanten Krümmung  $\rho$ , so folgt aus der Definition der Schnittkrümmung  $\langle R(X, \dot{c}_v)\dot{c}_v, X \rangle = \rho \langle X, X \rangle$  für alle  $X \perp \dot{c}_v(t)$ . Dann folgt aber mittels Polarisierung

$$\langle R(X, \dot{c}_v)\dot{c}_v, Y \rangle = \rho \langle X, Y \rangle$$

für alle  $X, Y \perp \dot{c}_v(t)$ . Somit gilt

$$R(X, \dot{c}_v)\dot{c}_v = \rho \cdot X$$

für alle  $X \perp \dot{c}_v(t)$  und mit  $J^\perp(t) \perp \dot{c}_v(t)$  erhalten wir:

$$\frac{D^2}{dt^2} J^\perp(t) + R(J^\perp(t), \dot{c}_v(t))\dot{c}_v(t) = s''_\rho(t)E(t) + \rho \cdot s_\rho(t)E(t) = 0$$

□

**Bemerkung.** Ist  $(M, g)$  eine beliebige Riemannsche Mannigfaltigkeit,  $v, w \in T_p M$  und  $\alpha > 0$  so gilt:

$$J_{\alpha v, \alpha w}(t) = J_{v, w}(\alpha t) = \alpha J_{\alpha v, w}(t)$$

denn  $t \mapsto J_{v, w}(\alpha t)$  ist das Jacobifeld längs  $c_{\alpha v}$  mit  $J_{v, w}(0) = 0$  und  $\frac{D}{dt}\big|_{t=0} J_{v, w}(\alpha t) = \alpha \frac{D}{dt} J_{v, w}(0) = \alpha w$ . Der Beweis folgt aus der Inspektion der Jacobigleichung oder alternativ wegen

$$J_{v, w}(t) = D \exp_p(vt)(wt).$$

**Korollar 5.5.5.** Seien  $(M_1, g_1)$  und  $(M_2, g_2)$  zwei vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit konstanter Schnittkrümmung  $\rho$ . Dann gilt für alle  $v_1, w_1 \in T_{p_1} M_1$  und  $v_2, w_2 \in T_{p_2} M_2$  mit

$$\|v_1\|_{g_1} = \|v_2\|_{g_2} \neq 0, \quad \|w_1\|_{g_1} = \|w_2\|_{g_2} \quad \text{sowie} \quad g_1(v_1, w_1) = g_2(v_2, w_2) :$$

$$\|J_{v_1, w_1}(t)\|_{g_1} = \|J_{v_2, w_2}(t)\|_{g_2}$$

*Beweis.* Wegen obiger Bemerkung können wir  $\|v_1\|_{g_1} = \|v_2\|_{g_2} = 1$  annehmen. Ist die Krümmung  $K = \rho$ , so gilt wegen Lemma 5.5.4:

$$\|J_{v_1, w_1}(t)\|_{g_1}^2 = s_\rho(t)^2 \|E_1(0)\|^2 + t^2 g_1(v_1, w_1)^2$$

wobei  $\|E_1(0)\|^2 = g_1(w_1, w_1) - g_1(w_1, v_1)^2$ . □

**Korollar 5.5.6.** Seien  $(M_1, g_1)$  und  $(M_2, g_2)$  zwei vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension und gleicher konstanter Krümmung. Seien  $p_1 \in M_1$  und  $p_2 \in M_2$  und  $r > 0$ , so dass  $\exp_{p_1} : B(0_{p_1}, r) \rightarrow B(p_1, r)$  ein Diffeomorphismus ist. Ist  $I : T_{p_1} M_1 \rightarrow T_{p_2} M_2$  eine lineare Isometrie, so ist  $\varphi : B(p_1, r) \rightarrow M_2$  mit  $\varphi(x) = \exp_{p_2} \circ I \circ \exp_{p_1}^{-1}(x)$  eine lokale Isometrie. Ist darüberhinaus  $\exp_{p_2} : B(0_{p_2}, r) \rightarrow B(p_2, r)$  ein Diffeomorphismus so ist  $\varphi : B(p_1, r) \rightarrow B(p_2, r)$  eine Isometrie.

*Beweis.* Der Beweis folgt aus Lemma 5.5.3 und Korollar 5.5.5. □

**Bemerkung.** Dies zeigt also, dass Mannigfaltigkeiten gleicher konstanter Krümmung und gleicher Dimension lokal isometrisch sind, d.h. zu  $p_1 \in M_1$  und  $p_2 \in M_2$  existiert ein  $r > 0$ , so dass  $B(p_1, r)$  isometrisch zu  $B(p_2, r)$  ist.

Im Falle einfach zusammenhängender Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung erhalten wir globale Isometrien.

**Satz 5.5.7.** Seien  $(M_1, g_1)$  und  $(M_2, g_2)$  zwei einfach zusammenhängende, vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension und gleicher konstanter Krümmung  $\rho \in \mathbb{R}$ . Dann sind  $M_1$  und  $M_2$  global isometrisch.

*Beweis.* Ist  $\rho \leq 0$ , so sind wegen des Satzes von Hadamard-Cartan für  $p_1 \in M_1$  und  $p_2 \in M_2$   $\exp_{p_1} : T_{p_1} M_1 \rightarrow M_1$  und  $\exp_{p_2} : T_{p_2} M_2 \rightarrow M_2$  Diffeomorphismen. Also ist  $\varphi = \exp_{p_2} \circ I \circ \exp_{p_1}^{-1} : M_1 \rightarrow M_2$  eine Isometrie, falls  $I : T_{p_1} M_1 \rightarrow T_{p_2} M_2$  als lineare Isometrie gewählt ist.

Ist  $\rho > 0$ , so betrachte die Sphäre

$$S_{1/\sqrt{\rho}}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\}$$

Dann ist die Sphäre  $S_{1/\sqrt{\rho}}^n$  eine Mannigfaltigkeit mit konstanter Krümmung  $\rho$ . Außerdem ist für  $p_0 \in S_{1/\sqrt{\rho}}^n$  die Exponentialabbildung

$$\exp_{p_0} : B(0_{p_0}, \frac{\pi}{\sqrt{\rho}}) \rightarrow S_{1/\sqrt{\rho}}^n \setminus \{-p_0\}$$

ein Diffeomorphismus.

Ist  $M$  eine weitere vollständige Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung  $\rho$ , so ist für  $\tilde{p}_0 \in M$  und eine gegebene lineare Isometrie  $I_{p_0} : T_{p_0} S_{1/\sqrt{\rho}}^n \rightarrow T_{\tilde{p}_0} M$  die Abbildung

$$\varphi_{p_0} = \exp_{\tilde{p}_0} \circ I_{p_0} \circ \exp_{p_0}^{-1} : S_{1/\sqrt{\rho}}^n \setminus \{-p_0\} \rightarrow M$$

eine lokale Isometrie. Betrachte einen weiteren Punkt  $p_1 \in S_{1/\sqrt{\rho}}^n$  mit  $p_1 \notin \{p_0, -p_0\}$ , so definiert

$$\varphi_{p_1} = \exp_{\varphi_{p_0}(p_1)} \circ D\varphi_{p_0}(p_1) \circ \exp_{p_1}^{-1} : S_{1/\sqrt{\rho}}^n \setminus \{-p_1\} \rightarrow M.$$

eine weitere lokale Isometrie, denn  $D\varphi_{p_0}(p_1) : T_{p_1} S_{1/\sqrt{\rho}}^n \rightarrow T_{\varphi_{p_0}(p_1)} M$  ist eine lineare Isometrie. Außerdem ist  $\varphi_{p_1}(p_1) = \varphi_{p_0}(p_1)$  sowie  $D\varphi_{p_1}(p_1) = D\varphi_{p_0}(p_1)$ .

Wegen Korollar 5.5.2 stimmen  $\varphi_{p_0}$  und  $\varphi_{p_1}$  auf dem gemeinsamen Definitionsbereich überein, d.h.  $\varphi_{p_1}(q) = \varphi_{p_0}(q)$  für alle  $q \in S_{1/\sqrt{\rho}}^n \setminus \{-p_1, -p_0\}$ .

Definiere nun eine Abbildung, die auf ganz  $S_{1/\sqrt{\rho}}^n$  definiert ist, durch

$$f(q) = \begin{cases} \varphi_{p_0}(q) & \text{für } q \neq -p_0 \\ \varphi_{p_1}(-p_0) & \text{für } q = -p_0 \end{cases}$$

Diese Abbildung ist eine lokale Isometrie. Wegen Satz 5.4.2 ist daher  $f$  eine Überlagerung. Da  $S_{1/\sqrt{\rho}}^n$  und  $M$  einfach zusammenhängend sind, ist  $f$  ein Diffeomorphismus und somit eine globale Isometrie.  $\square$

**Bemerkung.** Nach dem Satz von Synge muss jede orientierbare Mannigfaltigkeit gerader Dimension einfach zusammenhängend sein, falls sie eine Metrik positiver Krümmung trägt. Trägt sie eine Metrik konstanter positiver Krümmung so ist sie diffeomorph zur Sphäre. Im nicht orientierbaren Fall ist die Mannigfaltigkeit diffeomorph zum reell projektiven Raum, denn in diesem Falle ist die zugehörige zweiblättrige Überlagerung diffeomorph zur Sphäre. Warum lassen die Mannigfaltigkeiten  $S^k \times S^l$  oder der  $\mathbb{C}P^n$  mit  $k, l, n \geq 2$  keine Metriken konstanter Krümmung zu? Um dies zu beweisen, zeigt man, dass diese Mannigfaltigkeiten einfach zusammenhängend und nicht homöomorph zu Sphären sind. Letzteres zeigt man mit Hilfe von Homologiegruppen.

## Kapitel 6

# Geometrie von Untermannigfaltigkeiten

### 6.1 Die zweite Fundamentalform

Sei  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle_M)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $N \subset M$  eine Untermannigfaltigkeit (siehe Def. 1.1.3). Betrachte auf  $N$  die durch  $M$  induzierte Metrik. Ist  $v, w \in T_p N \subset T_p M$ , so setze:

$$\langle v, w \rangle_N := \langle v, w \rangle_M.$$

Definiere

$$T_p N^\perp = \{w \in T_p M \mid \langle w, v \rangle = 0 \text{ für alle } v \in T_p N\}$$

Dann gilt

$$T_p M = T_p N \oplus T_p N^\perp$$

d.h. zu jedem  $v \in T_p M$  existiert eine eindeutige Zerlegung

$$v = v^T + v^\perp \text{ mit } v^T \in T_p N \text{ und } v^\perp \in T_p N^\perp.$$

Am Ende von Abschnitt 2 wurde der folgende Satz gezeigt, den wir hier nochmals zitieren:

**Satz 6.1.1.** Sei  $\nabla^N$  der Levi-Civita Zusammenhang auf  $N$  und  $X, Y \in \Gamma(TN)$ . Dann gilt für alle  $p \in N$ :

$$\nabla_X^N Y(p) = (\nabla_X^M Y(p))^T.$$

**Definition 6.1.2.** Sei  $N \subset M$  eine Untermannigfaltigkeit der Riemannschen Mannigfaltigkeit  $M$  und

$$\Gamma(TN^\perp) := \{X : N \rightarrow TM \mid X(p) \in T_p N^\perp, X \text{ differenzierbar}\}$$

der Vektorraum der zu  $N$  orthogonalen Vektoren längs  $N$ . Dann heißt die Abbildung

$$\alpha : \Gamma(TN) \times \Gamma(TN) \rightarrow \Gamma(TN^\perp)$$

mit

$$\alpha(X, Y)(p) = \nabla_X^M Y(p) - \nabla_X^N Y(p).$$

die zweite Fundamentalform von  $N$ .

**Bemerkung.** Es gilt also:  $\alpha(X, Y)(p) = (\nabla_X^M Y(p))^\perp$ .

**Satz 6.1.3.** Die zweite Fundamentalform  $\alpha$  ist symmetrisch und ihre Werte  $\alpha(X, Y)(p)$  hängen nur von  $X(p)$  und  $Y(p)$  ab. Insbesondere definiert  $\alpha$  für jedes  $p \in N$  eine symmetrische Bilinearform

$$\alpha_p : T_p N \times T_p N \rightarrow (T_p N)^\perp$$

mit  $\alpha_p(X(p), Y(p)) = \alpha(X, Y)(p)$  für alle  $X, Y \in \Gamma(TN)$ .

*Beweis.* Aus

$$\begin{aligned} \alpha(X, Y)(p) - \alpha(Y, X)(p) &= (\nabla_X^M Y(p) - \nabla_Y^M X(p))^\perp \\ &= ([X, Y]_M)^\perp = ([X, Y]_N)^\perp = 0 \end{aligned}$$

folgt die Symmetrie von  $\alpha$ . Da  $\alpha(X, Y)(p) = (\nabla_X Y(p))^\perp$ , hängt  $\alpha$  in der ersten Variablen nur von  $X(p)$  ab. Aus der Symmetrie von  $\alpha$  folgt schließlich, dass  $\alpha(X, Y)(p)$  nur von  $X(p)$  und  $Y(p)$  abhängig ist.  $\square$

**Bemerkung.** Die zweite Fundamentalform hat folgende geometrische Interpretation. Wegen der Symmetrie ist  $\alpha$  durch ihre Werte auf Paaren der Form  $(v, v) \in T_{\pi(v)} N \times T_{\pi(v)} N$  bestimmt. Ist  $c_v : (-\epsilon, +\epsilon) \rightarrow N$  eine Geodätische in  $N$  mit  $\dot{c}_v(0) = v$  so gilt:

$$\alpha(v, v) = (\nabla_v^M \dot{c}_v(0))^\perp = \left( \frac{D^M}{dt} \dot{c}_v(0) \right)^\perp = \frac{D^M}{dt} \dot{c}_v(0) - \frac{D^N}{dt} \dot{c}_v(0) = \frac{D^M}{dt} \dot{c}_v(0).$$

Ist insbesondere  $\alpha(v, v) \neq 0$ , so ist die Geodätische  $c_v : (-\epsilon, +\epsilon) \rightarrow N$  in  $N$  keine Geodätische in  $M$ . Die zweite Fundamentalform  $\alpha$  misst also, inwieweit Geodätische in  $N$  von Geodätischen in  $M$  abweichen.

**Definition 6.1.4.** Sei  $N \subset M$  eine Untermannigfaltigkeit.

- (a)  $N$  heißt totalgeodätisch  $\Leftrightarrow \alpha \equiv 0$ .  
 (b) Ist  $e_1, \dots, e_k$  eine  $ON$ -Basis von  $T_p N$ , so heißt

$$H(p) := \frac{1}{k} \operatorname{spur} \alpha_p := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \alpha(e_i, e_i)$$

mittlerer Krümmungsvektor. Die Untermannigfaltigkeit  $N$  heißt minimal, falls  $H(p) = 0$  für alle  $p \in N$ .

**Bemerkungen.** (a)  $N$  ist genau dann totalgeodätisch, falls jede Geodätische in  $N$  auch Geodätische in  $M$  ist.

- (b) Der mittlere Krümmungsvektor ist unabhängig von der Wahl der  $ON$ -Basis.

**Beispiel.** Sei  $S_r^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = r\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$  mit der durch  $\mathbb{R}^{n+1}$  induzierten Metrik. Sei  $c_v : \mathbb{R} \rightarrow S_r^n$  Geodätische mit  $\dot{c}_v(0) = v$  und  $c_v(0) = p$ . Dann gilt

$$\alpha_p(v, v) = \frac{D^{\mathbb{R}^{n+1}}}{dt} \dot{c}_v(0) = \ddot{c}_v(0) \in (T_p S_r^n)^\perp = \{\lambda p \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Insbesondere existiert ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit  $\ddot{c}_v(0) = \lambda \cdot p$  und es folgt:

$$\lambda = \frac{\langle \ddot{c}_v(0), p \rangle}{\|p\|^2} = \frac{\langle \ddot{c}_v(0), p \rangle}{r^2}.$$

Da  $\langle \dot{c}_v(t), c_v(t) \rangle = 0$  ist  $\langle \ddot{c}_v(0), c_v(0) \rangle = -\langle \dot{c}_v(0), \dot{c}_v(0) \rangle = -\langle v, v \rangle$ .

Also gilt:  $\alpha_p(v, v) = \lambda \cdot p = -\frac{\langle v, v \rangle}{r^2} \cdot p$  und somit  $\alpha_p(v, w) = -\frac{\langle v, w \rangle}{r^2} p$ .

**Definition 6.1.5.** Sei  $N$  eine Untermannigfaltigkeit von  $M$  und  $\xi \in (T_p N)^\perp$ . Dann heißt der symmetrische Endomorphismus  $A_\xi : T_p N \rightarrow T_p N$  mit

$$\langle A_\xi(v), w \rangle = \langle \alpha_p(v, w), \xi \rangle$$

die Weingartenabbildung ("Shape-Operator") von  $N$ .

**Bemerkung.** Die Weingartenabbildung  $A_\xi$  wird durch die obige Gleichung eindeutig definiert und kann als Operator dual zur zweiten Fundamentalform interpretiert werden.

**Lemma 6.1.6.** Sei  $N$  eine Untermannigfaltigkeit von  $M$  und  $\xi : N \rightarrow TN^\perp$  ein normales Vektorfeld längs  $N$ . Dann folgt für jedes  $p \in N$ :

$$A_{\xi(p)}(v) = -(\nabla_v^M \xi(p))^T.$$

*Beweis.* Sei  $X \in \Gamma(TN)$  mit  $X(p) = w$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \langle A_{\xi(p)} v, w \rangle &= \langle \alpha_p(v, w), \xi(p) \rangle = \langle \nabla_v^M X(p)^\perp, \xi \rangle \\ &= \langle \nabla_v^M X(p), \xi(p) \rangle = v \langle X, \xi \rangle - \langle X(p), \nabla_v^M \xi \rangle \\ &= \langle w, -\nabla_v^M \xi(p) \rangle = \langle w, -(\nabla_v^M \xi(p))^T \rangle. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

**Bemerkungen.** (a) Da für jedes  $\xi \in (T_p N)^\perp$  die Weingartenabbildung  $A_\xi$  symmetrisch ist, existiert eine  $ON$ -Basis  $v_1, \dots, v_k \in T_p N$  aus Eigenvektoren von  $A_\xi$ . Die Eigenvektoren heißen Hauptkrümmungsrichtungen. Die Eigenwerte

$$\lambda_i(\xi) := \langle A_\xi v_i, v_i \rangle$$

heißen Hauptkrümmungen.

(b) Es gilt:

$$\frac{1}{k} \operatorname{spur} A_\xi = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \lambda_i(\xi) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \langle A_\xi v_i, v_i \rangle = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \langle \alpha_p(v_i, v_i), \xi \rangle = \langle H(p), \xi \rangle.$$

Daraus folgt:  $N$  ist minimal genau dann, falls  $\operatorname{spur} A_\xi = 0$  für alle  $\xi \in T_p N^\perp$ . Dabei genügt es,  $\operatorname{spur} A_\xi = 0$  für Vektoren  $\xi$  aus einer Basis von  $(T_p N)^\perp$  zu überprüfen.

## 6.2 Die Krümmung von Untermannigfaltigkeiten

Nun wollen wir den Krümmungstensor einer Untermannigfaltigkeit aus der zweiten Fundamentalform und aus dem Krümmungstensor des umgebenden Raumes berechnen.

**Satz 6.2.1.** (Gaußgleichungen)

Sei  $N \subset M$  eine Untermannigfaltigkeit der Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ,  $\alpha$  die zweite Fundamentalform von  $N$  und  $R^M$  der Krümmungstensor des umgebenden Raumes  $M$ . Dann gilt für den Krümmungstensor  $R^N$  von  $N$  für alle  $x, y, z \in T_p N$ :

$$R^N(x, y)z = (R^M(x, y)z)^T + A_{\alpha(y, z)}x - A_{\alpha(x, z)}y \quad (6.1)$$

Bilden wir auf beiden Seiten das Skalarprodukt mit  $w \in T_p N$ , so erhalten wir mit Hilfe von Lemma 6.1.6 :

$$\langle R^N(x, y)z, w \rangle = \langle R^M(x, y)z, w \rangle + \langle \alpha(x, w), \alpha(y, z) \rangle - \langle \alpha(y, w), \alpha(x, z) \rangle.$$

und insbesondere

$$\langle R^N(x, y)y, x \rangle = \langle R^M(x, y)y, x \rangle + \langle \alpha(x, x), \alpha(y, y) \rangle - \|\alpha(x, y)\|^2.$$

*Beweis.* Es seien  $X, Y, Z \in \Gamma(TN)$  Vektorfelder auf  $N$  mit  $X(p) = x$ ,  $Y(p) = y$  und  $Z(p) = z$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} R^M(x, y)z &= \nabla_X^M \nabla_Y^M Z(p) - \nabla_Y^M \nabla_X^M Z(p) - \nabla_{[X, Y]}^M Z(p) \\ &= \nabla_X^M (\nabla_Y^N Z(p) + \alpha(Y, Z)(p)) - \nabla_Y^M (\nabla_X^N Z(p) + \alpha(X, Z)(p)) \\ &\quad - \nabla_{[X, Y]}^N Z(p) - \alpha([X, Y], Z)(p) \end{aligned}$$

Betrachten wir auf beiden Seiten die zu  $T_p N$  tangentialen Komponenten so erhalten wir:

$$\begin{aligned} (R^M(x, y)z)^T &= R^N(x, y)z + (\nabla_X^M \alpha(Y, Z)(p))^T - (\nabla_Y^M \alpha(X, Z)(p))^T \\ &= R^N(x, y)z - A_{\alpha(y, z)}x + A_{\alpha(x, z)}y \end{aligned}$$

und damit die verlangte Formel für den Krümmungstensor von  $N$ . Bilden wir auf beiden Seiten dieser Formel das Skalarprodukt mit  $w \in T_p N$ , so erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle R^N(x, y)z, w \rangle &= \langle R^M(x, y)z, w \rangle + \langle A_{\alpha(y, z)}x, w \rangle - \langle A_{\alpha(x, z)}y, w \rangle \\ &= \langle R^M(x, y)z, w \rangle + \langle \alpha(x, w), \alpha(y, z) \rangle - \langle \alpha(y, w), \alpha(x, z) \rangle. \end{aligned}$$

□

**Beispiele.** (a) Sei  $N \subset M$  Untermannigfaltigkeit der Kodimension 1 und  $\xi$  ein Einheitsnormalenfeld. Da  $\alpha(x, y)$  für alle  $x, y \in T_p N$  ein Vielfaches von  $\xi$  ist, folgt:

$$\alpha(x, y) = \langle \alpha(x, y), \xi \rangle \xi = \langle A_\xi x, y \rangle \xi.$$

Wegen  $A_{f\xi}(v) = fA_\xi(v)$  für alle Funktionen  $f \in C^\infty(N)$  folgt aus der Formel 6.1 des Krümmungstensors von  $N$ :

$$R^N(x, y)z = (R^M(x, y)z)^T + \langle A_\xi y, z \rangle A_\xi(x) - \langle A_\xi x, z \rangle A_\xi(y)$$

und durch skalare Multiplikation mit  $w \in T_p N$  erhalten wir

$$\langle R^N(x, y)z, w \rangle = \langle R^M(x, y)z, w \rangle + \langle A_\xi y, z \rangle \langle A_\xi x, w \rangle - \langle A_\xi x, z \rangle \langle A_\xi y, w \rangle$$

Ist insbesondere  $M = \mathbb{R}^{n+1}$  der euklidische Raum, so erhalten wir

$$\langle R^N(x, y)z, w \rangle = \langle A_\xi y, z \rangle \langle A_\xi x, w \rangle - \langle A_\xi x, z \rangle \langle A_\xi y, w \rangle$$

und somit eine Formel für den Krümmungstensor in Termen der Weingartenabbildung (siehe Kurven und Flächen).

- (b) Ist  $M = S_r^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  so haben wir gesehen:  $\alpha_p(x, y) = -\langle x, y \rangle \frac{p}{r^2}$  für alle  $x, y \in T_p S_r^n$ . Betrachte nun das Einheitsnormalenfeld  $\xi := \frac{p}{r}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \langle A_\xi x, y \rangle &= \langle \alpha(x, y), \frac{p}{r} \rangle = -\frac{\langle x, y \rangle}{r^3} \langle p, p \rangle \\ &= \left\langle -\frac{x}{r}, y \right\rangle \end{aligned}$$

Daraus folgt  $A_\xi(x) = -\frac{x}{r}$  und wir erhalten:

$$R^{S_r^n}(x, y)z = \frac{1}{r^2} (\langle y, z \rangle x - \langle x, z \rangle y)$$

Definieren  $x, y \in T_p S_r^n$  eine *ON*-Basis von  $\sigma = \text{span}(x, y)$ , so gilt:

$$K_p(\sigma) = \langle R^{S_r^n}(x, y)y, x \rangle = \frac{1}{r^2} \langle y, y \rangle \langle x, x \rangle = \frac{1}{r^2}.$$



# Kapitel 7

## Volumen und Krümmung

### 7.1 Das Riemannsche Volumen

**Definition 7.1.1.** (lokale Definition des Riemannschen Volumens)

Sei  $(M, g)$  Riemannsche Mannigfaltigkeit,  $U \subset M$  offen,  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Karte und  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion mit

$$\text{supp } f := \overline{\{x \in M \mid f(x) \neq 0\}} \subset U$$

und  $f \circ x^{-1} : x(U) \rightarrow \mathbb{R}$  Lebesgue-integrierbar. Definiere

$$\int_M f d \text{vol} := \int_{x(U)} f \circ x^{-1} \sqrt{\det g^x \circ x^{-1}} dx_1 \dots dx_n$$

mit  $g_{ij}^x(p) := g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p\right)$ . Ist  $R \subset U$ , so dass  $x(R) \subset x(U)$  meßbar ist (z.B. abgeschlossen oder offen), so setze

$$\text{vol } R := \int_{x(U)} \chi_R \circ x^{-1} \sqrt{\det g^x \circ x^{-1}} dx_1 \dots dx_n,$$

wobei  $\chi_R : M \rightarrow \mathbb{R}$  die charakteristische Funktion bezeichnet.

Bevor wir die Unabhängigkeit dieser Definition von der Wahl der Karte zeigen, benötigen wir noch folgendes Lemma aus der linearen Algebra (Gramscher Determinantensatz).

**Lemma 7.1.2.** Sei  $E$  ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt  $g$ , d.h. sei  $(E, g)$  ein euklidischer Vektorraum. Es seien  $x_1, \dots, x_n$  sowie  $y_1, \dots, y_n$  Basen von  $E$ . Seien  $g^y, g^x$  die zugehörigen Fundamentalmatrizen, d.h.

$$g_{ij}^y := g(y_i, y_j) \text{ und } g_{ij}^x = g(x_i, x_j).$$

Dann folgt

$$g^y = a^t g^x a$$

falls  $a$  die Matrix des Basiswechsels ist, d.h. falls

$$y_j = \sum_{k=1}^n a_{kj} x_k$$

Insbesondere gilt:

$$\sqrt{\det g^y} = |\det a| \cdot \sqrt{\det g^x}$$

*Beweis.*

$$g_{ij}^y = g(y_i, y_j) = g\left(\sum_{\ell=1}^n a_{\ell i} x_\ell, \sum_{k=1}^n a_{k j} x_k\right) =$$

$$\sum_{\ell, k} a_{\ell i} a_{k j} g_{\ell k}^x = \sum_{\ell} a_{\ell i} (g^x a)_{\ell j} = (a^t g^x a)_{ij}$$

und somit gilt:

$$g^y = a^t g^x a.$$

Dies impliziert:

$\det g^y = (\det a)^2 \det g^x$  und da  $\det g^x$  und  $\det g^y$  positiv sind (denn das Skalarprodukt ist positiv definit), gilt

$$\sqrt{\det g^y} = |\det a| \sqrt{\det g^x}$$

□

**Satz 7.1.3.** *Die Definition des Integrals hängt nicht von der Wahl der Karte ab. Denn seien  $y : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^n, x : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  Karten der Riemannschen Mannigfaltigkeiten  $(M, g)$  und  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine integrierbare Funktion mit  $\text{supp } f \subset U_1 \cap U_2 =: U$ , so gilt:*

$$\int_{x(U)} f \circ x^{-1} \sqrt{\det g^x \circ x^{-1}} dx = \int_{y(U)} f \circ y^{-1} \sqrt{\det g^y \circ y^{-1}} dy.$$

*Beweis.* Ist

$$\left. \frac{\partial}{\partial y_j} \right|_p = \sum_{k=1}^n a_{k j}(p) \left. \frac{\partial}{\partial x_k} \right|_p,$$

so folgt durch Anwenden beider Seiten auf  $x_k$  ( $k$ -te Komponente der Koordinatenfunktion):

$$a_{k j}(p) = \frac{\partial x_k \circ y^{-1}}{\partial y_j}(y(p))$$

und somit ist

$$a(p) = D(x \circ y^{-1})(y(p)).$$

Aus obigem Lemma folgt:

$$\sqrt{\det g^y(p)} = |\det a(p)| \sqrt{\det g^x(p)} = |\det D(x \circ y^{-1})(y(p))| \sqrt{\det g^x(p)}.$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \int_{y(U)} f \circ y^{-1} \sqrt{\det g^y \circ y^{-1}} dy \\ &= \int_{y(U)} f \circ y^{-1} \sqrt{\det g^x \circ y^{-1}} |\det D(x \circ y^{-1})| dy \\ &= \int_{y(U)} f \circ x^{-1} \circ \underbrace{x \circ y^{-1}}_{\varphi} \sqrt{\det g^x \circ x^{-1} \circ \underbrace{x \circ y^{-1}}_{\varphi}} |\det D(\underbrace{x \circ y^{-1}}_{\varphi})| dy \\ &= \int_{x(U)} f \circ x^{-1} \sqrt{\det g^x \circ x^{-1}} dx, \end{aligned}$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen eine Konsequenz aus der Transformationsformel

$$\left( \int_{\varphi(A)} h dx = \int_A h \circ \varphi |\det D\varphi| dy \right)$$

angewandt auf  $A = y(U)$ ,  $\varphi = x \circ y^{-1} : y(U) \rightarrow x(U)$ , sowie  $h = f \circ x^{-1} \sqrt{\det g^x \circ x^{-1}}$  ist.  $\square$

Globalisiert wird der Integralbegriff mit Hilfe der Zerlegung der 1.

**Satz 7.1.4.** *Sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, die das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, d.h. eine abzählbare Basis der Topologie besitzt (dies ist zum Beispiel erfüllt, wenn ein abzählbarer Atlas existiert). Sei  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  eine offene Überdeckung von  $M$ . Dann existiert eine Zerlegung  $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in I}$  der 1, die der Überdeckung  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  untergeordnet ist, d.h.  $\varphi_\alpha : M \rightarrow [0, 1]$  sind differenzierbare Funktionen mit folgenden Eigenschaften:*

- (a)  $\text{supp } \varphi_\alpha \subset U_\alpha$  und zu jedem  $p \in M$  existiert eine offene Umgebung  $U$ , so dass die Menge  $\{\alpha \in I \mid \text{supp } \varphi_\alpha \cap U \neq \emptyset\}$  endlich ist.
- (b)  $\sum_{\alpha \in I} \varphi_\alpha(p) = 1$  für alle  $p \in M$  (wegen (a) sind nur endlich viele Summanden von null verschieden).

Nun lässt sich das Lebesgue-Integral wie folgt definieren:

**Definition 7.1.5.** Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit die das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Sei  $\{x_\alpha, U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  ein Atlas und  $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in I}$  eine Zerlegung der 1, die der Überdeckung  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  untergeordnet ist. Sei  $f : M \rightarrow [0, \infty]$  eine nicht negative Funktion messbare Funktion. Dann sind auch die Funktionen  $\varphi_\alpha \cdot f$  für alle  $\alpha \in I$  messbar. Definiere:

$$\int_M f \, \text{dvol} := \sum_{\alpha \in I} \int_M \varphi_\alpha \cdot f \, \text{dvol}.$$

Ist  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  messbar, so sind auch die Funktionen

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{falls } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

messbar. Ist  $\int f^+$  oder  $\int f^-$  endlich, so heißt  $f$  Lebesgue-integrierbar und

$$\int_M f \, \text{dvol} := \int_M f^+ \, \text{dvol} - \int_M f^- \, \text{dvol}$$

das Lebesgue-Integral von  $f$  auf  $M$  bezüglich der Metrik  $g$ .

**Bemerkungen.** (a) Man kann zeigen: Das Integral hängt nicht von der Wahl des Atlases und der Zerlegung der Eins ab.

- (b) Hat man eine orientierbare  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, so existiert eine  $n$ -Form  $dM$  mit  $dM(e_1, \dots, e_n) = 1$  für jede positiv orientierte  $ON$ -Basis  $e_1 \dots e_n \in T_p M$ . Ist  $(x, U)$  eine Karte, so folgt:  $(x^{-1})^* dM = \sqrt{\det g^x \circ x^{-1}} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ , wobei  $(x^{-1})^* dM$  die durch  $x^{-1} : x(U) \rightarrow U$  auf  $x(U) \subset \mathbb{R}^n$  zurückgeholte Differentialform bezeichnet. Dann gilt:

$$\int_M f \, \text{dvol} = \int_M f \, dM,$$

wobei die rechte Seite das Integral der Differentialform  $f \, dM$  darstellt. Wir schreiben in Zukunft auch  $\int_M f \, dM$  statt  $\int_M f \, \text{dvol}$ .

## 7.2 Methode zur Integralberechnung

Nun wollen wir eine effektive Möglichkeit kennenlernen, Volumen zu berechnen. Sei  $\rho : S_p M \rightarrow [0, \infty]$  eine stetige Funktion und

$$D_\rho = \{tv \mid v \in S_p M, 0 \leq t < \rho(v)\} \subset T_p M$$

die zugehörige offene sternförmige Menge. Die Exponentialabbildung  $\exp_p$  sei auf  $D_\rho$  ein Diffeomorphismus. Sei  $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$  offen und  $\varphi : V \rightarrow S_p M$  lokale Parametrisierung für die Sphäre  $S_p M \subset T_p M$  (d.h.  $\varphi$  ist Umkehrung einer Karte). Ist

$$U = \{(t, x) \mid x = (x_2, \dots, x_n) \in V, 0 < t < \rho(\varphi(x))\},$$

so definiert die Abbildung  $\psi : U \rightarrow M$  mit  $\psi(t, x) = \exp_p(t\varphi(x))$  eine lokale Parametrisierung für  $M$ . Sei  $\theta = \psi^{-1}$  die zugehörige Karte.

**Lemma 7.2.1.** *Mit den obigen Voraussetzungen gilt:*

$$\sqrt{\det g^\theta(t, x)} = J(t, \varphi(x)) \sqrt{\det g\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)},$$

wobei

$$J(t, v) = \sqrt{\det(g(J_{i,v}(t), J_{j,v}(t)))}$$

und  $J_{i,v}$  das Jacobifeld längs  $c_v(t)$  bezeichnet, mit  $J_{i,v}(0) = 0$  und  $\frac{D}{dt} J_{i,v}(0) = b_i$  für eine  $ON$ -Basis

$$b_2, \dots, b_n \in T_v S_p M \cong \{w \in T_p M \mid w \perp v\} =: v^\perp.$$

*Beweis.* Es gilt wegen des Lemmas 3.2.4 von Gauß:

$$\begin{aligned} g_{11}^\theta(t, x) &= g\left(\frac{\partial}{\partial t} \exp_p(t\varphi(x)), \frac{\partial}{\partial t} \exp_p(t\varphi(x))\right) = 1 \\ g_{1j}^\theta(t, x) &= g\left(\frac{\partial}{\partial t} \exp_p(t\varphi(x)), D \exp_p(t\varphi(x))\left(t \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)\right) = 0 \quad \text{falls } j \geq 2 \\ g_{ij}^\theta(t, x) &= g\left(D \exp_p(t\varphi(x))\left(t \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right), D \exp_p(t\varphi(x))\left(t \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)\right) \quad \text{falls } i, j \geq 2 \end{aligned}$$

Ist  $w_i = D \exp_p(t\varphi(x))\left(t\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)$ , so gilt:

$$\det g^\theta(t, x) = \det(g(w_i, w_j))_{2 \leq i, j \leq n}.$$

Wähle eine ON-Basis  $b_2, \dots, b_n \in T_{\varphi(x)}(S_p M) \subset T_p M$  und sei  $a = (a_{ki})$  die Matrix des Basiswechsels, d.h.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \sum_{k=2}^n a_{ki} b_k.$$

Dann gilt auch:

$$w_i = D \exp_p(t\varphi(x))\left(t\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) = \sum_{k=2}^n a_{ki} D \exp_p(t\varphi(x))(tb_k).$$

Wegen Lemma 7.1.2 folgt:

$$\sqrt{\det g\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)} = |\det a| \sqrt{\det g(b_i, b_j)_{2 \leq i, j \leq n}} = |\det a|$$

und

$$\sqrt{\det g^\theta(t, x)} = \sqrt{\det(g(w_i, w_j))_{2 \leq i, j \leq n}} = |\det a| \sqrt{\det g(D \exp_p(t\varphi(x))(tb_i), D \exp_p(t\varphi(x))(tb_j))}$$

Da  $D \exp_p(t\varphi(x))tb_i = J_{i, \varphi(x)}(t)$  das Jacobifeld längs  $c_{\varphi(x)}$  ist, mit

$$J_{i, \varphi(x)}(0) = 0 \text{ und } \left. \frac{D}{dt} \right|_{t=0} J_{i, \varphi(x)}(t) = b_i,$$

folgt

$$\begin{aligned} \sqrt{\det g^\theta(t, x)} &= |\det a| \sqrt{\det(g(J_{i, \varphi(x)}(t), J_{j, \varphi(x)}(t)))} \\ &= \sqrt{\det g\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right) J(t, \varphi(x))}. \end{aligned}$$

□

**Bemerkung.** Ist  $r < \rho(\varphi(x))$  für alle  $x \in V$  so ist  $x \rightarrow \psi(r, x)$  eine lokale Parametrisierung für die geodätische Sphäre  $S(p, r)$ . Ist  $\theta = \psi^{-1}$ , so folgt aus der gleichen Rechnung wie oben:

$$\sqrt{\det g^\theta(x)} = \sqrt{\det g\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right) J(r, \varphi(x))}$$

**Satz 7.2.2.** Sei  $(M, g)$  eine  $n$ -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $\rho : S_p M \rightarrow [0, \infty)$  eine stetige Funktion. Sei  $D_\rho \subset T_p M$  die zugehörige sternförmige Menge gegeben durch

$$D_\rho = \{tv \mid v \in S_p M, 0 \leq t < \rho(v)\}$$

und es sei  $\exp_p : D_\rho \rightarrow \exp_p(D_\rho) \subset M$  ein Diffeomorphismus. Dann gilt für jede integrierbare Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\text{supp } f \subset \exp_p(D_\rho)$ :

$$\int_M f dM = \int_{S_p M} \int_0^{\rho(v)} f \circ \exp_p(tv) J(t, v) dt dS_p M(v),$$

Ist  $r \leq \inf\{\rho(v) \mid v \in S_p M\}$  und ist  $S(p, r) \subset M$  die geodätische Sphäre mit Radius  $r > 0$  um  $p \in M$ , so folgt:

$$\int_{S(p, r)} f dS(p, r) = \int_{S_p M} f \circ \exp_p(rv) \cdot J(r, v) dS_p M(v)$$

Insbesondere gilt:

$$\text{vol } S(p, r) = \int_{S_p M} J(r, v) dS_p M(v)$$

und

$$\text{vol } B(p, r) = \int_0^r \text{vol } S(p, t) dt$$

**Bemerkung.** Ist  $M = \mathbb{R}^n$  der euklidische Vektorraum, so ist  $\langle J_{i,v}(t), J_{j,v}(t) \rangle = \delta_{ij} t^2$  und somit  $J(t, v) = t^{n-1}$ . Damit erhalten wir die Formel für die Integration in Polarkoordinaten (Analysis III).

*Beweis.* Seien  $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$  offen und  $\varphi : V \rightarrow S_p M$  eine lokale Parametrisierung der Sphäre  $S_p M \subset T_p M$ . Ist

$$U = \{(t, x) \mid x \in V, 0 < t < \rho(\varphi(x))\},$$

so definiert die Abbildung  $\psi : U \rightarrow M$  mit  $\psi(t, x) = \exp_p(t\varphi(x))$  eine lokale Parametrisierung von  $M$ . Sei  $\theta = \psi^{-1}$  die zugehörige Karte und  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine integrierbare Funktion mit  $\text{supp } f \subset \psi(U)$ . Dann folgt mit Hilfe des Satzes von Fubini:

$$\begin{aligned} \int_M f dM &= \int_U f(\exp_p t\varphi(x)) \sqrt{\det g^\theta(t, x)} dt dx \\ &= \int_V \int_0^{\rho(\varphi(x))} f(\exp_p t\varphi(x)) \sqrt{\det g^\theta(t, x)} dt dx \\ &= \int_V \int_0^{\rho(\varphi(x))} f \circ \exp_p(t(\varphi(x))) J(t, \varphi(x)) dt \sqrt{\det g\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)} dx \\ &= \int_{S_p M} \int_0^{\rho(v)} f \circ \exp_p(tv) J(t, v) dt dS_p M(v) \end{aligned}$$

Das letzte Gleichheitszeichen folgt aus der Definition des Integrals auf  $S_p M$ . Ist  $r < \inf \rho(v)$ , so definiert  $\psi(x) = \exp_p r\varphi(x)$  eine lokale Parametrisierung von  $S(p, r)$ . Sei  $\theta = \psi^{-1}$  so gilt:

$$\int_{S(p, r)} f dS(p, r) = \int_V f(\exp_p r\varphi(x)) \sqrt{\det g^\theta(x)} dx.$$

mit

$$\sqrt{\det g^\theta(x)} = J(r, \varphi(x)) \sqrt{\det g\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)}.$$

Daher erhalten wir:

$$\int_{S(p,r)} f dS(p,r) = \int_{S_p M} f(\exp_p(rv)) J(r,v) dS_p M(v).$$

□

**Beispiele.** Sei  $M_\rho$  einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit der Krümmung  $\rho$ . Ist  $\rho \leq 0$ , so ist  $\exp_p : T_p M_\rho \rightarrow M_\rho$  ein Diffeomorphismus. Ist  $\rho > 0$ , so ist  $M_\rho = S_{1/\sqrt{\rho}}^n$  und  $\exp_p : B(0_p, r) \rightarrow \exp_p(B(0_p, r)) \subset M_\rho$  ist ein Diffeomorphismus, für  $r \leq \frac{\pi}{\sqrt{\rho}}$ . Sei  $b_2, \dots, b_n$  eine ON-Basis von  $v^\perp$  mit  $v \in S_p M$ , so gilt:

$$J_{i,v}(t) = s_\rho(t) E_i(t)$$

wobei  $E_i(t)$  das parallele Vektorfeld längs der Geodätischen  $c_v$  darstellt, mit  $E_i(0) = b_i$ . Außerdem ist

$$g(J_{i,v}(t), J_{j,v}(t)) = \delta_{ij} s_\rho^2(t),$$

wobei

$$s_\rho(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{-\rho}} \sinh \sqrt{-\rho} t & \rho < 0 \\ t & \rho = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\rho}} \sin \sqrt{\rho} t & \rho > 0 \end{cases}$$

Also gilt:

$$J(t, v) = s_\rho^{n-1}(t).$$

Ist  $\rho \leq 0$ , so gilt für alle  $r > 0$

$$\text{vol } S(p, r) = \int_{S_p M} J(r, v) dS_p M(v) = \omega_{n-1} s_\rho^{n-1}(r).$$

Dabei ist  $\omega_{n-1} = \text{vol}(S_p M) = \text{vol } S^{n-1}$  denn  $S_p M$  mit der Metrik  $g_p$  und  $S^{n-1}$  mit der Standardmetrik des  $\mathbb{R}^n$  sind isometrisch. Des Weiteren ist

$$\text{vol } B(p, r) = \int_0^r \text{vol } S(p, t) dt = \omega_{n-1} \int_0^r s_\rho^{n-1}(t) dt$$

Da für  $\rho < 0$

$$\begin{aligned} s_\rho(t) &= \frac{1}{\sqrt{-\rho}} \sinh \sqrt{-\rho} t = \frac{1}{2\sqrt{-\rho}} (e^{\sqrt{-\rho} t} - e^{-\sqrt{-\rho} t}) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{-\rho}} e^{\sqrt{-\rho} t} (1 - e^{-2\sqrt{-\rho} t}) \end{aligned}$$

folgt :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{vol } S(p, r)}{e^{\sqrt{-\rho}(n-1)r}} = \frac{\omega_{n-1}}{(2\sqrt{-\rho})^{n-1}}.$$

Mit Hilfe der Regel von L'Hospital erhalten wir auch die Existenz des Limes

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{vol } B(p, r)}{e^{\sqrt{-\rho}(n-1)r}} &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{vol } S(p, r)}{\sqrt{-\rho}(n-1)e^{\sqrt{-\rho}(n-1)r}} \\ &= \frac{\omega_{n-1}}{\sqrt{-\rho}(n-1)(2\sqrt{-\rho})^{n-1}}. \end{aligned}$$

Insbesondere folgt

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{vol } S(p, r)}{\text{vol } B(p, r)} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{vol } S(p, r)}{e^{\sqrt{-\rho}(n-1)r}} \frac{e^{\sqrt{-\rho}(n-1)r}}{\text{vol } B(p, r)} = \sqrt{-\rho}(n-1) > 0$$

sowie

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \text{vol } S(p, r)}{r} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \text{vol } B(p, r)}{r} = (n-1)\sqrt{-\rho}.$$

Für  $\rho = 0$  gilt:

$$\text{vol } S(p, r) = \omega_{n-1}r^{n-1}$$

und

$$\text{vol } B(p, r) = \omega_{n-1} \int_0^r t^{n-1} dt = \frac{\omega_{n-1}}{n} r^n.$$

Im Gegensatz zum hyperbolischen Raum strebt hier das Verhältnis des Sphärenvolumens zum Ballvolumen für große Radien gegen null. Für  $\rho > 0$  und  $r \leq \frac{\pi}{\sqrt{\rho}}$  folgt:

$$\text{vol } S(p, r) = \omega_{n-1} \left( \frac{\sin \sqrt{\rho} r}{\sqrt{\rho}} \right)^{n-1}$$

sowie

$$\text{vol } B(p, r) = \omega_{n-1} \int_0^r \left( \frac{\sin \sqrt{\rho} t}{\sqrt{\rho}} \right)^{n-1} dt.$$

Insbesondere gilt:  $\text{vol } B(p, \frac{\pi}{\sqrt{\rho}}) = \text{vol } S_{1/\sqrt{\rho}}^n$ .

### 7.3 Der Schnittort

Im folgenden Abschnitt sei  $(M, g)$  stets eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit. Insbesondere existiert zu je zwei Punkten auf  $M$  eine minimale verbindende Geodätische. Wir wollen nun eine „maximale“ sternförmige Menge in  $T_p M$  definieren, für die die Exponentialabbildung  $\exp_p$  ein Diffeomorphismus auf ihr Bild ist. Eine zentrale Rolle wird die *Schnittortfunktion*  $\rho : S_p M \rightarrow [0, \infty]$  mit

$$\rho(v) = \sup\{t \geq 0 \mid d(\exp_p tv, p) = t\}$$

spielen. Insbesondere ist die Geodätische  $c_v : [0, a] \rightarrow M$  minimal falls  $a \leq \rho(v)$ . Ist  $\rho(v) < \infty$ , so ist  $c_v : [0, a] \rightarrow M$  für  $a > \rho(v)$  nicht mehr minimal. Außerdem gilt:

**Lemma 7.3.1.** *Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $v \in S_p M$  mit  $t_0 = \rho(v) < \infty$ . Dann folgt:*

*Entweder ist  $c_v(t_0)$  konjugiert zu  $p = c_v(0)$ , oder es existiert ein  $w \in S_p M$  mit  $w \neq v$  und  $c_v(t_0) = c_w(t_0)$ .*

*Beweis.* Ist  $c_v(t_0)$  nicht konjugiert zu  $p = c_v(0)$ , so hat das Differential der Exponentialabbildung  $D \exp_p(t_0 v)$  im Punkte  $t_0 v$  maximalen Rang. Daher existiert eine offene Umgebung  $V \subset T_p M$  von  $t_0 v$ , so dass  $\exp_p : V \rightarrow \exp_p(V)$  ein Diffeomorphismus ist. Sei  $n_0 \in \mathbb{N}$  so gewählt, dass  $v(t_0 + 1/n) \in V$  für alle  $n \geq n_0$ . Da nach Definition von  $t_0$  die Geodätische  $c_v : [0, t_0 + 1/n] \rightarrow M$  nicht minimal ist, existiert für jedes  $n$  ein  $w_n \in S_p M$  und eine minimale Geodätische  $c_{w_n} : [0, t_0 + a_n] \rightarrow M$  mit  $c_v(t_0 + 1/n) = c_{w_n}(t_0 + a_n)$  für ein  $a_n \in \mathbb{R}$ . Aus der Dreiecksungleichung folgt

$$t_0 - \frac{1}{n} \leq d(p, c_v(t_0)) - d(c_v(t_0), c_v(t_0 + 1/n)) \leq d(p, c_v(t_0 + 1/n)) = t_0 + a_n \leq t_0 + \frac{1}{n}$$

und somit ist  $|a_n| \leq \frac{1}{n}$ . Da  $\exp_p : V \rightarrow \exp_p(V)$  ein Diffeomorphismus ist, ist  $w_n(t_0 + a_n) \notin V$  für  $n \geq n_0$ . Wegen der Kompaktheit von  $S_p M$  existiert eine konvergente Teilfolge  $w_{n_j}$  mit Grenzwert  $w \in S_p M \setminus \{v\}$ , denn  $w t_0 \neq v t_0$ . Außerdem gilt  $c_v(t_0) = c_w(t_0)$ .  $\square$

Wir zeigen nun, dass eine Geodätische über den konjugierten Punkt hinaus nicht minimal sein kann. Dieser Sachverhalt wird manchmal auch *Jacobi-Kriterium* genannt.

**Satz 7.3.2.** (*Jacobi-Kriterium*) Ist  $c_v : [0, a] \rightarrow M$  Geodätische und  $c_v(0)$  konjugiert zu  $c_v(a)$ . Dann ist für alle  $\epsilon > 0$  die Geodätische  $c_v : [0, a + \epsilon] \rightarrow M$  nicht minimal.

Der Beweis des obigen Satzes wird mit Hilfe der zweiten Variationsformel erfolgen an die wir nochmals erinnern. Sei  $c : [0, a] \rightarrow M$  eine Geodätische mit  $\|\dot{c}(t)\| = 1$  und  $\alpha : (-\epsilon, +\epsilon) \times [0, a] \rightarrow M$  eine eigentliche stückweise differenzierbare Variation von  $c$ , d.h.  $\alpha$  ist eine eigentliche Variation für die eine Unterteilung  $0 = t_0 < \dots < t_k = a$  existiert, so dass  $\alpha : (-\epsilon, +\epsilon) \times [t_{i-1}, t_i] \rightarrow M$  differenzierbar ist. Ist  $X(t) = \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \alpha_s(t)$  das zugehörige Variationsvektorfeld, so gilt für  $E(s) = E(\alpha_s)$

$$E''(0) = \int_0^a \left\| \frac{D}{dt} X(t) \right\|^2 - \langle R(X(t), \dot{c}(t)) \dot{c}(t), X(t) \rangle dt.$$

Da  $\alpha$  stückweise differenzierbar ist, ist  $\frac{D}{dt} X(t)$  an den Stelle  $t_i$  nicht wohldefiniert. Da es sich um eine Nullmenge handelt spielt dies bei der Integration keine Rolle.

Ist  $X^\perp = X - \langle X, \dot{c} \rangle \dot{c}$  die zu  $\dot{c}$  orthogonale Komponente von  $X$ , so folgt für  $L(s) = L(\alpha_s)$

$$L''(0) = \int_0^a \left\| \frac{D}{dt} X^\perp(t) \right\|^2 - \langle R(X^\perp, \dot{c}) \dot{c}, X^\perp \rangle dt$$

Da  $\left\| \frac{D}{dt} X(t) \right\|^2 \geq \left\| \frac{D}{dt} X^\perp(t) \right\|^2$ , aber der Krümmungsterm sich nicht ändert, wenn man  $X$  durch  $X^\perp$  ersetzt, gilt:

$$E''(0) \geq L''(0).$$

Für den Beweis des Jacobi-Kriteriums genügt es also zu zeigen: Ist  $c(a)$  konjugiert zu  $c(0)$ , so existiert zu jedem  $\epsilon > 0$  eine eigentliche stückweise differenzierbare Variation von  $c_v : [0, a + \epsilon] \rightarrow M$  mit  $E''(0) < 0$ .

Es ist nützlich, die Formel für die zweite Variation der Energie zu bilinearisieren.

**Definition 7.3.3.** Sei  $c : [0, a] \rightarrow M$  eine Geodätische mit  $\|\dot{c}(t)\| = 1$ . Sei  $\Gamma_c(TM)$  der Vektorraum der stückweise differenzierbaren Vektorfelder längs  $c$ . Dann heißt die symmetrische Bilinearform

$$I : \Gamma_c(TM) \times \Gamma_c(TM) \rightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$I(X, Y) := \int_0^a \left\langle \frac{D}{dt} X, \frac{D}{dt} Y \right\rangle - \langle R(X, \dot{c})\dot{c}, Y \rangle dt$$

die *Indexform* von  $c$ .

**Bemerkung.** Ist also  $\alpha(s, t) = \exp_{c(t)} sX(t)$  die kanonische Variation zu  $X \in \Gamma_c(TM)$ , so gilt:

$$\left. \frac{d^2}{ds^2} \right|_{s=0} E(\alpha_s) = I(X, X)$$

sowie

$$\left. \frac{d^2}{ds^2} \right|_{s=0} L(\alpha_s) \leq I(X, X).$$

Gleichheit gilt in der Abschätzung, falls  $X \perp \dot{c}$ .

Durch partielle Integration läßt sich die Indexform auch in folgender Form darstellen.

**Lemma 7.3.4.** *Es seien  $X, Y \in \Gamma_c(TM)$  stückweise differenzierbare Vektorfelder längs der nach Bogenlänge parametrisierten Geodätischen  $c : [0, a] \rightarrow M$  und  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = a$  eine Unterteilung, so dass  $X, Y$  auf  $[t_{i-1}, t_i]$  differenzierbar sind. Dann gilt:*

$$I(X, Y) = \sum_{i=1}^k \left\langle \frac{D}{dt} X, Y \right\rangle \Big|_{t_{i-1}^+}^{t_i^-} - \int_0^a \left\langle \frac{D^2}{dt^2} X + R(X, \dot{c})\dot{c}, Y \right\rangle dt$$

wobei

$$\frac{D}{dt} X(t_{i-1}^+) = \lim_{t \searrow t_{i-1}} \frac{D}{dt} X(t)$$

den rechtsseitigen Grenzwert und

$$\frac{D}{dt} X(t_i^-) = \lim_{t \nearrow t_i} \frac{D}{dt} X(t)$$

den linksseitigen Grenzwert bezeichnet.

*Beweis.* Da  $\frac{d}{dt} \left\langle \frac{D}{dt} X, Y \right\rangle = \left\langle \frac{D^2}{dt^2} X, Y \right\rangle + \left\langle \frac{D}{dt} X, \frac{D}{dt} Y \right\rangle$  gilt:

$$\begin{aligned} \int_0^a \left\langle \frac{D}{dt} X, \frac{D}{dt} Y \right\rangle dt &= \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\langle \frac{D}{dt} X, \frac{D}{dt} Y \right\rangle dt \\ &= \sum_{i=1}^k \left\langle \frac{D}{dt} X, Y \right\rangle \Big|_{t_{i-1}^+}^{t_i^-} - \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\langle \frac{D^2}{dt^2} X, Y \right\rangle dt \end{aligned}$$

□

**Bemerkung.** Ist  $X$  differenzierbar, so gilt:

$$I(X, Y) = \left\langle \frac{D}{dt} X, Y \right\rangle \Big|_0^a - \int_0^a \left\langle \frac{D^2}{dt^2} X + R(X, \dot{c})\dot{c}, Y \right\rangle dt$$

und

$$I(X, Y) = \left\langle \frac{D}{dt} X, Y \right\rangle \Big|_0^a,$$

falls  $X$  ein Jacobifeld ist.

Wir können nun Satz 7.3.2 beweisen.

*Beweis.* Sei  $c : [0, a + \epsilon] \rightarrow M$  Geodätische mit  $\|\dot{c}(t)\| = 1$  und  $J : [0, a] \rightarrow \Gamma_c(TM)$  ein Jacobifeld längs  $c$  mit  $J(0) = J(a) = 0$ . Dann folgt  $\langle J(t), \dot{c}(t) \rangle = 0$  für alle  $t \in [0, a]$ , wegen  $\frac{d^2}{dt^2} \langle J, \dot{c} \rangle = 0$  aus den Randbedingungen  $J(0) = J(a) = 0$ . Betrachte das stückweise differenzierbare Vektorfeld längs  $c$  mit

$$\tilde{J}(t) = \begin{cases} J(t) & \text{für } t \in [0, a] \\ 0 & \text{für } t \in [a, a + \epsilon] \end{cases}$$

Aus Lemma 7.3.4 folgt:

$$I(\tilde{J}, \tilde{J}) = \left\langle \frac{D}{dt} \tilde{J}, \tilde{J} \right\rangle \Big|_0^{a^-} + \left\langle \frac{D}{dt} \tilde{J}, \tilde{J} \right\rangle \Big|_{a^+}^{a+\epsilon} = 0$$

Sei nun  $X$  ein differenzierbares Vektorfeld längs  $c$  und  $\delta > 0$ , so betrachte das Vektorfeld  $J_\delta := \tilde{J} + \delta \cdot X$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} I(J_\delta, J_\delta) &= 2\delta I(\tilde{J}, X) + \delta^2 I(X, X) \\ &= 2\delta \left\langle \frac{D}{dt} J, X \right\rangle \Big|_0^a + \delta^2 I(X, X). \end{aligned}$$

Wähle  $X \perp \dot{c}$  mit  $X(0) = X(a + \epsilon) = 0$  und  $X(a) = -\frac{D}{dt} J(a)$  (Setze zum Beispiel  $X = \varphi \cdot E$ , wobei  $E$  das parallele Vektorfeld längs  $c$  ist mit  $E(a) = -\frac{D}{dt} J(a)$  und  $\varphi$  eine differenzierbare Funktion ist mit  $\varphi(0) = \varphi(a + \epsilon) = 0$  und  $\varphi(a) = 1$ ). Dann gilt:

$$\begin{aligned} I(J_\delta, J_\delta) &= -2\delta \left\| \frac{D}{dt} J(a) \right\|^2 + \delta^2 (I(X, X)) \\ &= \delta \left( -2 \left\| \frac{D}{dt} J(a) \right\|^2 + \delta I(X, X) \right) < 0 \end{aligned}$$

falls

$$\delta I(X, X) < 2 \left\| \frac{D}{dt} J(a) \right\|^2.$$

Dann definiert  $\alpha(s, t) = \exp_{c(t)}(sJ_\delta(t))$  eine eigentliche Variation und es gilt wegen der Bemerkung nach der Definition der Indexform:

$$L''(0) = I(J_\delta, J_\delta) < 0.$$

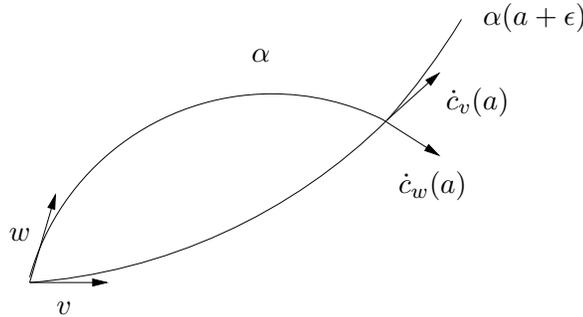
□

**Satz 7.3.5.** Sei  $M$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $v, w \in S_p M$  mit  $v \neq w$  und  $c_v(a) = c_w(a)$  für ein  $a > 0$ . Dann ist für alle  $\epsilon > 0$  die Geodätische  $c_v : [0, a + \epsilon] \rightarrow M$  nicht minimal. Insbesondere ist  $\rho(v) \leq a$ .

*Beweis.* Sei  $c_v : [0, a + \epsilon] \rightarrow M$  minimal für ein  $\epsilon > 0$  und somit  $d(c_v(0), c_v(a + \epsilon)) = a + \epsilon$ . Dann ist auch die Kurve  $\alpha : [0, a + \epsilon] \rightarrow M$  mit

$$\alpha(t) = \begin{cases} c_w(t) & 0 \leq t \leq a \\ c_v(t) & \text{für } a \leq t \leq a + \epsilon \end{cases}$$

minimal, denn  $L(\alpha) = a + \epsilon$ . Dann wäre aber  $\alpha$  eine Geodätische und somit insbesondere



differenzierbar. Somit muss auch  $\dot{c}_v(a) = \dot{c}_w(a)$  gelten. Da Geodätische übereinstimmen wenn ihre Tangentialvektoren in einem Punkt übereinstimmen folgt  $c_v(t) = c_w(t)$  für alle  $t$  und somit ist  $v = w$  im Widerspruch zur Annahme.  $\square$

**Satz 7.3.6.** Ist  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, so ist  $\rho : S_p M \rightarrow [0, \infty]$  stetig

**Bemerkung.** Die offenen Umgebungen von  $\infty$  sind Mengen der Form  $\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ . Insbesondere konvergiert eine Folge von reellen Zahlen nach unendlich, wenn für jedes  $a \in \mathbb{R}$  fast alle Folgenglieder größer als  $a$  sind.

*Beweis.* Sei  $v_k \in S_p M$  eine Folge, mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v_k = v \in S_p M.$$

Zu zeigen ist:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(v_k) = \rho(v)$$

Wir zeigen zunächst:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \rho(v_k) \leq \rho(v).$$

Ist  $\rho(v) = \infty$ , so gilt dies trivialerweise. Sei also  $\rho(v) < \infty$ . Dann gilt für jedes  $\epsilon > 0$  die Ungleichung  $\rho(v_k) < \rho(v) + \epsilon$  für fast alle  $k$ , denn andernfalls könnten wir eine Teilfolge  $v_{k_j}$  wählen mit  $\rho(v_{k_j}) \geq \rho(v) + \epsilon =: t_0$ . Dies würde

$$t_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} d(c_{v_{k_j}}(0), c_{v_{k_j}}(t_0)) = d(c_v(0), c_v(t_0))$$

im Widerspruch zur Definition von  $\rho(v)$  implizieren. Somit folgt  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \rho(v_k) \leq \rho(v)$ . Nun zeigen wir

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \rho(v_k) \geq \rho(v).$$

Falls dies nicht der Fall ist, existiert eine Teilfolge  $v_{k_j}$  mit  $t_j = \rho(v_{k_j}) \rightarrow t_0 < \rho(v)$ . Dann ist wegen des Jacobi-Kriteriums 7.3.2  $c_v(t_0)$  nicht konjugiert zu  $c_v(0)$ . Damit existiert eine offene Umgebung  $U \subset T_p M$  von  $t_0 v$ , so dass  $\exp_p : U \rightarrow \exp_p(U)$  ein Diffeomorphismus ist. Nun wähle  $j_0$ , so dass  $t_j v_{k_j} \in U$  für alle  $j \geq j_0$ . Damit kann  $c_{v_{k_j}}(t_j)$  nicht konjugiert zu  $c_{v_{k_j}}(0)$  und wegen Lemma 7.3.1 existieren Vektoren  $w_j \in S_p M$  mit  $c_{w_j}(t_j) = c_{v_{k_j}}(t_j)$  mit  $w_j t_j \notin U$ , denn eingeschränkt auf  $U$  ist  $\exp_p$  injektiv. Nach Übergang zu einer Teilfolge können wir Konvergenz  $w_j \rightarrow w \neq v$  annehmen und es folgt  $c_v(t_0) = c_w(t_0)$ . Wegen Satz 7.3.5 impliziert dies  $\rho(v) \leq t_0$  im Widerspruch zur Annahme.  $\square$

Kompakte Mannigfaltigkeiten lassen sich durch die Schnittortfunktion  $\rho$  charakterisieren.

**Korollar 7.3.7.** *Ist  $M$  eine vollständige Mannigfaltigkeit und  $p \in M$ , so ist  $\rho(v) < \infty$  für alle  $v \in S_p M$  genau dann, wenn  $M$  kompakt ist.*

*Beweis.* Ist  $M$  kompakt, so ist  $\text{diam } M < \infty$  und jede minimale Geodätische hat Länge  $\leq \text{diam } M$ . Insbesondere ist  $\rho(v) \leq \text{diam } M$ .

Ist  $M$  nicht kompakt, so existieren Folgen  $p_i, q_i \in M$  mit  $d(p_i, q_i) \rightarrow \infty$ . Da  $d(p_i, q_i) \leq d(p_i, p) + d(p, q_i)$  können wir  $d(p_i, p) \rightarrow \infty$  annehmen.

Da  $M$  vollständig ist, existiert eine Folge  $v_i \in S_p M$ , so dass  $c_{v_i}$  minimale Geodätische sind mit  $c_{v_i}(d(p, p_i)) = p_i$ . Sei  $v_{k_j} \in S_p M$  eine konvergente Teilfolge mit  $v_{k_j} \rightarrow v$ , so folgt aus der Stetigkeit von  $\rho : \rho(v) = \lim_{j \rightarrow \infty} \rho(v_{k_j}) \geq d(p, p_{k_j}) \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Korollar 7.3.8.** *Betrachte die sternförmige Menge  $U(p) \subset T_p M$  mit*

$$U(p) = \{tv \mid v \in S_p M, 0 \leq t < \rho(v)\}$$

*Dann ist  $U(p)$  offen in  $T_p M$  und ihr Rand*

$$\partial U(p) = \overline{U(p)} \setminus U(p) \subset T_p M$$

*ist gegeben durch*

$$\partial U(p) = \{\rho(v)v \mid v \in S_p M, \rho(v) < \infty\}.$$

*Beweis.* Der Beweis sei als Übung überlassen. Er ist eine Konsequenz aus der Stetigkeit von  $\rho$ .  $\square$

**Definition 7.3.9.** Die Menge  $C(p) := \exp_p(\partial U(p))$  heißt *Schnittort* (cut locus). Die Menge  $\partial U(p)$  heißt *tangentialer Schnittort*.

Wir werden nun sehen, dass für jedes  $p \in M$  die Exponentialabbildung  $\exp_p$  die Mannigfaltigkeit bis auf den Schnittort parametrisiert. Der Schnittort selbst ist eine Menge von Maß null und spielt daher bei der Volumenberechnung keine Rolle.

**Satz 7.3.10.** *Ist  $(M, g)$  eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit, so gilt:*

$$(a) \quad M = \exp_p(U(p)) \cup C(p) \text{ und } \exp_p(U(p)) \cap C(p) = \emptyset.$$

(b)  $\exp_p : U(p) \rightarrow \exp_p(U(p))$  ist ein Diffeomorphismus.

(c)  $\text{vol}_M(C(p)) = 0$

*Beweis.* Die erste Aussage von Teil (a) ist eine Konsequenz aus der Vollständigkeit von  $M$ , denn zu jedem  $q \in M$  existiert eine minimale Geodätische  $c_v : [0, t_0] \rightarrow M$  mit  $v \in S_p M$  und  $c_v(t_0) = q$ . Also ist  $d(c_v(t_0), p) = t_0$  und damit ist  $t_0 v \in \overline{U}(p)$ .

Sei  $q \in \exp_p(U(p)) \cap C(p)$ , so existieren  $t_0 v \in U(p), v \in S_p M, 0 \leq t_0 < \rho(v)$  und  $\rho(w)w \in \partial U(p), w \in S_p M$  mit  $\exp_p t_0 v = \exp_p(\rho(w) \cdot w)$ . Da beide Geodätische minimal sind, ist  $t_0 = \rho(w) = d(p, q)$  und wegen Satz 7.3.5 ist daher  $c_v : [0, t_0 + \epsilon] \rightarrow M$  für beliebiges  $\epsilon > 0$  nicht minimal im Widerspruch zu  $t_0 < \rho(v)$ .

Die Abbildung  $\exp_p : U(p) \rightarrow \exp_p(U(p))$  ist bijektiv. Denn sind  $v, w \in S_p M$  mit  $c_v(t_0) = c_w(t_1) = q$  mit  $0 \leq t_0 < \rho(v)$  und  $0 \leq t_1 < \rho(w)$ , so ist  $t_0 = t_1 = d(p, q)$ . Da beide Geodätische über  $t_0$  hinaus minimal, gilt:  $v = w$ .

Nun wollen wir zeigen, dass  $\exp_p : U(p) \rightarrow \exp_p(U(p))$  ein Diffeomorphismus ist. Wegen des Jacobi-Kriteriums hat für alle  $v \in S_p M$  und  $t < \rho(v)$  das Differential

$$D \exp_p(tv) : T_{tv} T_p M \rightarrow T_{\exp_p(tv)} M$$

maximalen Rang hat. Daher ist wegen des inversen Funktionentheorems  $\exp_p^{-1}$  differenzierbar. Es bleibt noch Teil (c) zu beweisen. Da  $\partial U(p) = \{\rho(v)v \mid v \in S_p M, \rho(v) < \infty\} \subset T_p M$  in  $T_p M$  das Maß 0 besitzt (als Graph einer stetigen Funktion über  $S_p M$ ) hat auch  $\exp_p(\partial U(p)) = C(p)$  in  $M$  Maß 0, denn differenzierbare Abbildungen bilden Nullmengen auf Nullmengen ab.  $\square$

**Korollar 7.3.11.** Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar. Sei  $\rho : S_p M \rightarrow [0, \infty]$  die Schnittortfunktion.

Dann gilt:

$$\int_M f dM = \int_{S_p M} \int_0^{\rho(v)} f(\exp_p(tv)) J(v, t) dt dS_p M(v).$$

Insbesondere ist

$$\text{vol } M = \int_{S_p M} \left( \int_0^{\rho(v)} J(v, t) dt \right) dS_p M(v).$$

**Beispiel.** Betrachte die Sphäre  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$  mit der durch  $\mathbb{R}^{n+1}$  induzierten Metrik. Dann ist  $\rho(v) = \pi$  und  $J(v, t) = (\sin t)^{n-1}$  und somit

$$\text{vol } S^n = \int_0^\pi (\sin t)^{n-1} dt \cdot \text{vol}(S_p M) = \text{vol } S^{n-1} \int_0^\pi \sin^{n-1} t dt.$$

## 7.4 Konjugierte Punkte und Minimalität von Geodätischen

Nun zeigen wir noch, dass Geodätische ohne konjugierte Punkte lokal minimal sind. Dies ist eine schwache Form der Umkehrung von Satz 7.3.2. Es gilt nämlich :

**Satz 7.4.1.** Sei  $c : [0, a] \rightarrow M$  eine Geodätische, so dass für alle  $t \in (0, a]$  der Punkt  $c(t)$  nicht konjugiert zu  $c(0)$  ist. Dann existiert ein  $\epsilon > 0$  mit folgender Eigenschaft:  
Ist  $h : [0, a] \rightarrow M$  eine stückweise differenzierbare Kurve mit

$$d(h(t), c(t)) < \epsilon$$

und ist  $h(0) = c(0), h(a) = c(a)$ , so gilt:  $L(h) \geq L(c)$ . Diese Ungleichung ist strikt, falls  $h[0, a] \neq c[0, a]$ .

Für den Beweis benötigen wir Lemma 3.2.6 und folgenden Sachverhalt.

**Lemma 7.4.2.** Sei  $v \in T_p M$ ,  $v \neq 0$ . Sei  $c_v : [0, a] \rightarrow M$  eine Geodätische, so dass für alle  $t \in (0, a]$  der Punkt  $c_v(t)$  nicht konjugiert zu  $c_v(0)$  ist. Dann existiert ein  $\epsilon > 0$ , so dass für alle stückweise differenzierbaren Kurven  $h : [0, a] \rightarrow M$  mit

$$d(h(t), c_v(t)) < \epsilon$$

und  $h(0) = c_v(0), h(a) = c_v(a)$  folgendes gilt: es existiert eine stückweise differenzierbare Kurve  $\varphi : [0, a] \rightarrow T_p M$  mit  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(a) = av$  sowie

$$h(t) = \exp_p(\varphi(t))$$

für alle  $t \in [0, a]$ . Außerdem ist  $D \exp_p(\varphi(t)) : T_p M \rightarrow T_{\exp_p(\varphi(t))} M$  invertierbar für alle  $t \in [0, a]$ .

*Beweis.* Sei  $c_v : [0, a] \rightarrow M$  Geodätische, so dass für alle  $t \in (0, a]$  der Punkt  $c(t)$  nicht zu  $c(0)$  konjugiert ist. Dann ist  $D \exp_p(tv)$  invertierbar für alle  $t \in [0, a]$ . Somit existiert für jedes  $t \in [0, a]$  eine offene Umgebung  $U_{tv} \subset T_p M$  von  $tv$ , so dass  $\exp_p : U_{tv} \rightarrow \exp_p(U_{tv})$  ein Diffeomorphismus ist.

Da der Strahl  $\{tv \mid t \in [0, a]\} \subset T_p M$  kompakt ist, können wir eine endliche Teilüberdeckung  $U_{t_1 v}, \dots, U_{t_k v}$  mit  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq a$  von  $\{tv \mid t \in [0, a]\}$  auswählen. Setze

$$U := \bigcup_{i=1}^k U_{t_i v},$$

und  $V = \exp_p(U)$ . Wähle  $\epsilon > 0$  so klein, dass für alle stückweise differenzierbaren Kurven  $h : [0, a] \rightarrow M$  mit  $d(h(t), c_v(t)) \leq \epsilon$  und  $h(0) = p = c_v(0)$  sowie  $h(a) = c_v(a)$  gilt:  $h[0, a] \subset V$  und  $h$  ist homotop zu  $c_v$ . Zu einem solchen  $h$  existiert genau eine stückweise differenzierbare Kurve (Lift)

$$\varphi : [0, a] \rightarrow U$$

mit  $\exp_p \circ \varphi = h$ . Dabei ist  $\varphi$  durch die Wahl des Anfangspunktes  $\varphi(0) = 0$  eindeutig bestimmt. Da die Homotopie zwischen  $c_v$  und  $h$  zu einer Homotopie zwischen dem Strahl  $vt$  und  $\varphi$  mit festen Endpunkten geliftet werden kann (siehe Kapitel über Überlagerungstheorie) folgt  $\varphi(a) = av$ .  $\square$

*Beweis von Satz 7.4.1.*

Sei  $c : [0, a] \rightarrow M$  eine Geodätische, so dass für alle  $t \in (0, a]$  der Punkt  $c(t)$  nicht konjugiert

zu  $c(0)$  ist und  $\epsilon > 0$  gewählt wie in Lemma 7.4.2. Ist  $h : [0, a] \rightarrow M$  eine stückweise differenzierbare Kurve mit

$$d(h(t), c(t)) < \epsilon$$

und  $h(0) = c(0)$  und  $h(a) = c(a)$ . Nun existiert eine stückweise differenzierbare Kurve  $\varphi : [0, a] \rightarrow T_p M$  mit  $\varphi(0) = \phi(0) = 0$  und  $\varphi(a) = \phi(a) = av$  und  $h(t) = \exp_p(\varphi(t))$ . Wegen Lemma 3.2.6 folgt dann

$$L(h) = L(\exp_p \circ \varphi) \geq L(c_v[0, a]).$$

Da  $D \exp_p(\varphi(t))$  invertierbar ist, impliziert Lemma 3.2.6 auch den zweiten Teil der Behauptung.  $\square$

## 7.5 Indexform und Minimaleigenschaften von Jacobifeldern

Ob eine Geodätische keine konjugierten Punkte besitzt, läßt sich mittels der Indexform charakterisieren. Ist  $c : [0, a] \rightarrow M$  eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische, so bezeichne mit

$$\Gamma_c^0(TM) = \{X \in \Gamma_c(TM) \mid X(0) = X(a) = 0\}$$

die Menge der stückweise differenzierbaren Vektorfelder längs  $c$  mit  $X(0) = X(a) = 0$ .

**Definition 7.5.1.** Ist  $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  eine Bilinearform auf einem Vektorraum  $V$ , so heißt

$$V_0 := \{X \in V \mid B(X, Y) = 0 \text{ für alle } Y \in V\}$$

der *Nullraum* (Entartungsraum von  $B$ ).

**Lemma 7.5.2.**  $X \in \Gamma_c(TM)$  ist genau dann ein Jacobifeld, falls  $I(X, Y) = 0$  für alle  $Y \in \Gamma_c^0(TM)$  gilt. Insbesondere ist  $X \in \Gamma_c^0(TM)$  genau dann im Nullraum von

$$I : \Gamma_c^0(TM) \times \Gamma_c^0(TM) \rightarrow \mathbb{R},$$

falls  $X$  ein Jacobifeld ist.

*Beweis.* Aus Lemma 7.3.4 folgt: sind  $X, Y \in \Gamma_c(TM)$  bezüglich der Unterteilung  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = a$  stückweise differenzierbar, so gilt:

$$I(X, Y) = \sum_{i=1}^k \left\langle \frac{D}{dt} X, Y \right\rangle \Big|_{t_{i-1}^+}^{t_i^-} - \int_0^a \left\langle \frac{D^2}{dt^2} X + R(X, \dot{c})\dot{c}, Y \right\rangle dt.$$

Ist  $X$  ein Jacobifeld, so folgt

$$I(X, Y) = \left\langle \frac{D}{dt} X(a), Y(a) \right\rangle - \left\langle \frac{D}{dt} X(0), Y(0) \right\rangle = 0$$

für alle  $Y \in \Gamma_c^0(TM)$ .

Sei  $X$  bezüglich der Unterteilung  $0 = t_0 < t_1 \dots < t_k \leq a$  stückweise differenzierbar und es gelte  $I(X, Y) = 0$  für alle  $Y \in \Gamma_c^0(TM)$ . Wähle eine differenzierbare Funktion  $\varphi : [0, a] \rightarrow [0, \infty]$  mit  $\varphi(t_i) = 0$  und  $\varphi|_{(t_{i-1}, t_i)} > 0$ . Setze

$$Y(t) = \begin{cases} \varphi(t) \left( \frac{D^2}{dt^2} X + R(X, \dot{c})\dot{c} \right) & \text{für } t \in [0, a] \setminus \bigcup_{i=0}^k t_i \\ 0 & \text{für } t = t_i \end{cases}$$

Dann gilt:

$$0 = I(X, Y) = - \int_0^a \varphi(t) \left\| \frac{D^2}{dt^2} X + R(X, \dot{c})\dot{c} \right\|^2 dt$$

und es folgt:  $\frac{D^2}{dt^2} X(t) + R(X, \dot{c})\dot{c} = 0$  für alle Intervalle  $(t_{i-1}, t_i)$ . Insbesondere ist das Vektorfeld  $X$  eingeschränkt auf jedes der offenen Intervalle  $(t_{i-1}, t_i)$  ein Jacobifeld. Daher folgt für beliebiges  $Y \in \Gamma_c^0(TM)$ :

$$\begin{aligned} 0 &= I(X, Y) = \sum_{i=1}^k \left\langle \frac{D}{dt} X(t), Y \right\rangle \Big|_{t_{i-1}^+}^{t_i^-} \\ &= \sum_{i=1}^k \left( \left\langle \frac{D}{dt} X(t_i^-), Y(t_i) \right\rangle - \left\langle \frac{D}{dt} X(t_{i-1}^+), Y(t_{i-1}) \right\rangle \right) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \left\langle \frac{D}{dt} X(t_i^-) - \frac{D}{dt} X(t_i^+), Y(t_i) \right\rangle. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\frac{D}{dt} X(t_i^-) = \frac{D}{dt} X(t_i^+)$$

für alle  $i \in \{1, \dots, k-1\}$  und damit ist  $X$  ein Jacobifeld auf ganz  $[0, a]$ , denn  $X$  ist auf jedem Teilintervall  $(t_{i-1}, t_i)$  ein Jacobifeld mit in  $t_i$  gleichen links- und rechtsseitigen Ableitungen.  $\square$

Es gilt der folgende Zusammenhang zwischen der Indexform und konjugierten Punkten.

**Satz 7.5.3.** *Sei  $c : [0, a] \rightarrow M$  eine Geodätische mit  $\|\dot{c}(t)\| = 1$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a)  $c(t)$  ist für alle  $t \in (0, a]$  nicht konjugiert zu  $c(0)$ .

(b) Die Indexform

$$I : \Gamma_c^0(TM) \times \Gamma_c^0(TM) \rightarrow \mathbb{R}$$

ist positiv definit, d.h.  $I(X, X) > 0$  für alle  $X \in \Gamma_c^0(TM)$  mit  $X \neq 0$ .

(c)  $c : [0, a] \rightarrow M$  hat keine konjugierten Punkte, d.h. für alle  $t_1, t_2$  mit  $t_1 < t_2$  ist  $c(t_2)$  nicht konjugiert zu  $c(t_1)$ .

*Beweis.* Ist  $c(t)$  für alle  $t \in (0, a]$  nicht konjugiert zu  $c(0)$ , so ist  $c$  nach Satz 7.4.1 lokal minimal. Jedes  $X \in \Gamma_c^0(TM)$  induziert eine eigentliche Variation  $\alpha_s(t) = \exp_{c(t)} sX(t)$  und es folgt:

$$0 \leq \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} L(\alpha_s) \leq I(X, X).$$

Ist  $I(X, X) = 0$  so folgt für alle  $Y \in \Gamma_c^0(TM)$  und  $\delta \in \mathbb{R}$ :

$$0 \leq I(X - \delta Y, X - \delta Y) = -2\delta I(X, Y) + \delta^2 I(Y, Y).$$

Daher gilt:  $I(X, Y) = 0$  für alle  $Y \in \Gamma_c^0(TM)$  und  $X$  ist ein Jacobifeld längs  $c$  mit  $X(0) = X(a) = 0$ . Da  $c(a)$  nicht konjugiert zu  $c(0)$  ist, folgt:  $X \equiv 0$ .

Ist  $I : \Gamma_c^0(TM) \times \Gamma_c^0(TM) \rightarrow \mathbb{R}$  positiv definit, so hat  $c : [0, a] \rightarrow M$  keine konjugierten Punkte. Denn ist  $c(t_2)$  konjugiert zu  $c(t_1)$  mit  $0 \leq t_1 < t_2 \leq a$ , so existiert ein Jacobifeld längs  $c$  mit  $J(t_1) = J(t_2) = 0$ . Definiere

$$X(t) = \begin{cases} J(t) & \text{für } t \in [t_1, t_2] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

so gilt:  $I(X, X) = 0$  im Widerspruch zur Positivität von  $I$ . □

**Korollar 7.5.4.** (*Minimaleigenschaften von Jacobifeldern*)

Sei  $c : [0, a] \rightarrow M$  eine Geodätische mit  $\|\dot{c}(t)\| = 1$ . Dann gilt:

(a)  $X \in \Gamma_c(TM)$  ist ein Jacobifeld genau dann, falls für alle  $Y \in \Gamma_c^0(TM)$  gilt:

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} I(X + sY, X + sY) = 0.$$

Insbesondere ist  $X$  kritischer Punkt von  $Z \rightarrow I(Z, Z)$  unter allen Variationen mit festem Endpunkt.

(b) Hat  $c$  keine konjugierten Punkte und ist  $X$  ein Jacobifeld, so folgt

$$I(X, X) \leq I(Z, Z)$$

für alle  $Z \in \Gamma_c(TM)$  mit  $X(0) = Z(0)$  und  $X(a) = Z(a)$ .

Gilt darüberhinaus  $I(Z, Z) = I(X, X)$ , so ist  $Z \equiv X$ .

*Beweis.* Da  $I(X + sY, X + sY) = I(X, X) + 2sI(X, Y) + s^2I(Y, Y)$  erhalten wir:

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} I(X + sY, X + sY) = 2I(X, Y).$$

somit folgt (a) aus Lemma 7.5.2.

Sei  $X \in \Gamma_c(TM)$  ein Jacobifeld längs einer Geodätischen  $c : [0, a] \rightarrow M$  ohne konjugierte Punkte. Sei  $Z \in \Gamma_c(TM)$  mit  $Z(0) = X(0), Z(a) = X(a)$ . Dann folgt aus Satz 7.5.3:

$$0 \leq I(X - Z, X - Z) = I(X, X) - 2I(X, Z) + I(Z, Z).$$

Da  $X$  ein Jacobifeld ist, erhalten wir mit Hilfe der Bemerkung nach Lemma 7.3.4:

$$I(X, Z) = \left\langle \frac{D}{dt} X, Z \right\rangle \Big|_0^a = \left\langle \frac{D}{dt} X, X \right\rangle \Big|_0^a = I(X, X).$$

Somit folgt:

$$I(X, X) \leq I(Z, Z).$$

Wegen Satz 7.5.3 gilt die Gleichheit dann und nur dann, falls  $Z = X$ . □

# Kapitel 8

## Vergleichssätze

### 8.1 Rauchscher Vergleichssatz

Wir wollen nun das Verhalten von Jacobifeldern in zwei verschiedenen Mannigfaltigkeiten vergleichen, deren Schnittkrümmung längs Geodätischer einer Ungleichung genügen. Grob gesprochen besagt er: Je größer die Krümmung ist, desto kleiner sind die Jacobifelder. Diese Aussage wollen wir im Folgenden präzisieren und beweisen.

Es seien  $M$  und  $\tilde{M}$  zwei vollständige Mannigfaltigkeiten mit  $n = \dim M \leq \dim \tilde{M}$ . Es seien  $c : [0, a] \rightarrow M$  sowie  $\tilde{c} : [0, a] \rightarrow \tilde{M}$  nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische. Wir wollen Jacobifelder längs  $c$  mit Jacobifeldern längs  $\tilde{c}$  vergleichen.

Für eine Geodätische  $c : [0, a] \rightarrow M$  bezeichnen wir im Folgenden mit

$$\Gamma_{c^\perp}(TM) = \{X \in \Gamma_c(TM) \mid X(t) \perp \dot{c}(t)\}.$$

den Vektorraum der stückweisen differenzierbaren und zu  $c$  orthogonalen Vektorfelder längs  $c$ . Seien  $p \in M$ ,  $\tilde{p} \in \tilde{M}$ . Sind  $v, w \in T_pM$  bzw.  $\tilde{v}, \tilde{w} \in T_{\tilde{p}}\tilde{M}$  linear unabhängige Vektoren, so bezeichnen mit  $K[v, w]$  bzw.  $\tilde{K}[\tilde{v}, \tilde{w}]$  die Schnittkrümmungen der Ebenen in  $T_pM$  bzw.  $T_{\tilde{p}}\tilde{M}$  die durch  $v, w$  bzw.  $\tilde{v}, \tilde{w}$  aufgespannt werden.

**Lemma 8.1.1.** *Es seien  $E_1, \dots, E_{n-1} \in \Gamma_{c^\perp}(TM)$  und  $\tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_{n-1} \in \Gamma_{\tilde{c}^\perp}(T\tilde{M})$  orthonormale parallele Vektorfelder orthogonal zu  $c$  bzw.  $\tilde{c}$ . Dann gilt für die lineare Abbildung  $\phi : \Gamma_{c^\perp}(TM) \rightarrow \Gamma_{\tilde{c}^\perp}(T\tilde{M})$  mit*

$$\phi X(t) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i(t) \tilde{E}_i(t) \text{ falls } X = \sum_{i=1}^{n-1} a_i(t) E_i(t) \in \Gamma_{c^\perp}(TM)$$

$$(a) \langle \phi X(t), \phi X(t) \rangle = \langle X(t), X(t) \rangle$$

$$(b) \frac{D}{dt} \phi X(t) = \phi \left( \frac{D}{dt} X(t) \right)$$

Des Weiteren folgt:

$$I_{\tilde{c}}(\phi X, \phi X) \leq I_c(X, X)$$

falls  $\tilde{K}[\phi X(t), \dot{\tilde{c}}(t)] \geq K[X(t), \dot{c}(t)]$  für alle  $t \in [0, a]$ . Außerdem ist die Ungleichung strikt ist, falls für ein  $t_0 \in [0, a]$

$$\tilde{K}[\phi X(t_0), \dot{\tilde{c}}(t_0)] > K[X(t_0), \dot{c}(t_0)]$$

gilt.

*Beweis.* Teil (a) folgt unmittelbar aus der Orthonormalität der Felder  $E_1, \dots, E_{n-1}$  und  $\tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_{n-1}$ , denn

$$\langle \phi X(t), \phi X(t) \rangle = \sum a_i^2(t) = \langle X(t), X(t) \rangle.$$

Teil (b) folgt aus der Parallelität der Felder  $E_1, \dots, E_{n-1}$  sowie  $\tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_{n-1}$ . Da

$$\begin{aligned} I_{\tilde{c}}(\phi X, \phi X) &= \int_0^a \left\langle \frac{D}{dt} \phi X(t), \frac{D}{dt} \phi X(t) \right\rangle - \langle \tilde{R}(\phi X, \dot{\tilde{c}}) \dot{\tilde{c}}, \phi X \rangle dt \\ &= \int_0^a \left\langle \phi \left( \frac{D}{dt} X(t) \right), \phi \left( \frac{D}{dt} X(t) \right) \right\rangle - \tilde{K}[\phi X, \dot{\tilde{c}}] \|\phi X\|^2 dt \\ &\leq \int_0^a \left\langle \frac{D}{dt} X(t), \frac{D}{dt} X(t) \right\rangle - K[X, \dot{c}] \|X\|^2 dt \\ &= I_c(X, X) \end{aligned}$$

folgt die Ungleichung.

Ist die Schnittkrümmung  $\tilde{K}[\phi X(t_0), \dot{\tilde{c}}(t_0)]$  für ein  $t_0 \in [0, a]$  echt größer als  $K[X(t_0), \dot{c}(t_0)]$ , so ist die Ungleichung strikt.  $\square$

**Satz 8.1.2.** (*Rauchscher Vergleichssatz*)

Es seien  $M$  und  $\tilde{M}$  Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit  $\dim M \leq \dim \tilde{M}$  und  $c : [0, a] \rightarrow M$  und  $\tilde{c} : [0, a] \rightarrow \tilde{M}$  nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische mit  $\tilde{K}(\tilde{\sigma}) \geq K(\sigma)$  für alle Ebenen  $\sigma \subset T_{c(t)}M$  bzw.  $\tilde{\sigma} \subset T_{\tilde{c}(t)}\tilde{M}$  die  $\dot{c}(t)$  bzw.  $\dot{\tilde{c}}(t)$  enthalten. Hat  $\tilde{c}$  keine konjugierten Punkte und sind  $J$  bzw.  $\tilde{J}$  Jacobifelder längs  $c$  bzw.  $\tilde{c}$  mit

$$J(0) = 0 = \tilde{J}(0), \quad \left\langle \frac{D}{dt} J(0), \dot{c}(0) \right\rangle = \left\langle \frac{D}{dt} \tilde{J}(0), \dot{\tilde{c}}(0) \right\rangle \quad \text{und} \quad \left\| \frac{D}{dt} J(0) \right\| = \left\| \frac{D}{dt} \tilde{J}(0) \right\|$$

so gilt:

$$\|\tilde{J}(t)\| \leq \|J(t)\|$$

für alle  $t \in [0, a]$ . Ist darüberhinaus  $\|\tilde{J}(t_0)\| = \|J(t_0)\|$  für ein  $t_0 \in (0, a]$ , so gilt:

$$\|\tilde{J}(t)\| = \|J(t)\| \quad \text{sowie} \quad \tilde{K}[\tilde{J}(t), \dot{\tilde{c}}(t)] = K[J(t), \dot{c}(t)]$$

für alle  $t \in [0, t_0]$ .

*Beweis.* Ist  $J$  ein Jacobifeld mit  $J(0) = 0$  so folgt:

$$\begin{aligned} J(t) &= \langle J(t), \dot{c}(t) \rangle \dot{c}(t) + J^\perp(t) \\ &= (at + b) \dot{c}(t) + J^\perp(t) \quad (\text{denn } \frac{d^2}{dt^2} \langle J(t), \dot{c}(t) \rangle = 0) \\ &= at \dot{c}(t) + J^\perp(t) \quad \text{mit } a = \left\langle \frac{D}{dt} J(0), \dot{c}(0) \right\rangle \end{aligned}$$

wobei die Summanden zu  $c$  tangente bzw. orthogonale Jacobifelder längs  $c$  darstellen. Daher genügt es, den Satz für orthogonale Jacobifelder zu beweisen.

Seien also  $J$  bzw.  $\tilde{J}$  orthogonale Jacobifelder längs  $c$  bzw.  $\tilde{c}$  mit  $J(0) = \tilde{J}(0) = 0$  und  $\|\frac{D}{dt}J(0)\| = \|\frac{D}{dt}\tilde{J}(0)\|$ . Dann folgt aus der zweimaligen Anwendung der Regel von L'Hospital:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|J(t)\|^2}{\|\tilde{J}(t)\|^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\langle \frac{D}{dt}J(t), J(t) \rangle}{\langle \frac{D}{dt}\tilde{J}(t), \tilde{J}(t) \rangle} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|\frac{D}{dt}J(t)\|^2}{\|\frac{D}{dt}\tilde{J}(t)\|^2} = 1$$

Zum Beweis der obigen Ungleichung zeigen wir, dass die Funktion

$$t \mapsto \frac{\|J(t)\|^2}{\|\tilde{J}(t)\|^2}$$

monoton steigend ist. Dazu zeigen wir für alle  $t_0 \in (0, a]$ :

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} \frac{\|J(t)\|^2}{\|\tilde{J}(t)\|^2} \geq 0$$

Diese Ungleichung ist äquivalent zu:

$$\langle \frac{D}{dt}J(t_0), J(t_0) \rangle \|\tilde{J}(t_0)\|^2 - \langle \frac{D}{dt}\tilde{J}(t_0), \tilde{J}(t_0) \rangle \|J(t_0)\|^2 \geq 0$$

Betrachte die Vektorfelder  $X(t) = J(t)\|\tilde{J}(t_0)\| \in \Gamma_{c^\perp}(TM)$  und  $\tilde{X}(t) = \tilde{J}(t)\|J(t_0)\| \in \Gamma_{\tilde{c}^\perp}(T\tilde{M})$  längs  $c[0, t_0]$  und  $\tilde{c}[0, t_0]$ .

Da  $\tilde{X}$  ein Jacobifeld längs  $\tilde{c}$  ist, folgt aus der Bemerkung nach Lemma 7.3.4 :

$$\begin{aligned} I_{\tilde{c}[0, t_0]}(\tilde{X}, \tilde{X}) &= \langle \frac{D}{dt}\tilde{X}(t_0), \tilde{X}(t_0) \rangle - \langle \frac{D}{dt}\tilde{X}(0), \tilde{X}(0) \rangle \\ &= \langle \frac{D}{dt}\tilde{J}(t_0), \tilde{J}(t_0) \rangle \|J(t_0)\|^2 \end{aligned}$$

Genauso folgt:

$$I_{c[0, t_0]}(X, X) = \langle \frac{D}{dt}J(t_0), J(t_0) \rangle \|\tilde{J}(t_0)\|^2$$

Also entspricht obiger Ungleichung:

$$I_{\tilde{c}[0, t_0]}(\tilde{X}, \tilde{X}) \leq I_{c[0, t_0]}(X, X).$$

Da  $\|X(t_0)\| = \|\tilde{X}(t_0)\|$  ist, gibt es eine Abbildung  $\phi : \Gamma_{c^\perp}(TM) \rightarrow \Gamma_{\tilde{c}^\perp}(T\tilde{M})$  wie in Lemma 8.1.1 mit  $\phi(X(t_0)) = \tilde{X}(t_0)$ .

(Dazu wähle parallele orthonormale Vektorfelder  $E_1, \dots, E_{n-1} \in \Gamma_{c^\perp}(TM)$  und  $\tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_{n-1} \in \Gamma_{\tilde{c}^\perp}(T\tilde{M})$ , so dass  $E_1(t_0) = \frac{X(t_0)}{\|X(t_0)\|}$  und  $\tilde{E}_1(t_0) = \frac{\tilde{X}(t_0)}{\|\tilde{X}(t_0)\|}$ ).

Da  $\tilde{K}(\phi X, \dot{c}) \geq K(X, \dot{c})$  folgt aus Lemma 8.1.1

$$I_{\tilde{c}[0, t_0]}(\phi X, \phi X) \leq I_{c[0, t_0]}(X, X).$$

Wegen  $\phi X(t_0) = \tilde{X}(t_0)$  und  $\phi X(0) = 0 = \tilde{X}(0)$  und da  $\tilde{c}[0, t_0]$  keine konjugierten Punkte besitzt, folgt aus der Minimaleigenschaft der Jacobifelder (Korollar 7.5.4 )

$$I_{\tilde{c}[0, t_0]}(\tilde{X}, \tilde{X}) \leq I_{\tilde{c}[0, t_0]}(\phi X, \phi X).$$

Es bleibt noch den Gleichheitsfall zu behandeln.

Ist  $\|J(t_0)\| = \|\tilde{J}(t_0)\|$ , so folgt  $\frac{\|J(t)\|}{\|\tilde{J}(t)\|} = 1$  für alle  $t \in [0, t_0]$  und somit ist insbesondere

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} \frac{\|J(t)\|^2}{\|\tilde{J}(t)\|^2} = 0.$$

Dies impliziert

$$I_{\tilde{c}[0, t_0]}(\tilde{X}, \tilde{X}) = I_{\tilde{c}[0, t_0]}(\phi X, \phi X)$$

und mit Korollar 7.5.4 erhalten wir  $\tilde{X}(t) = \phi X(t)$  für alle  $t \in [0, t_0]$ .

Aus Lemma 8.1.1 folgt:

$$\tilde{K}[\phi X(t), \dot{\tilde{c}}(t)] = K[X(t), \dot{c}(t)]$$

für alle  $t \in [0, t_0]$  und somit:

$$\tilde{K}[\tilde{J}(t), \dot{\tilde{c}}(t)] = K[\tilde{X}(t), \dot{\tilde{c}}(t)] = K[X(t), \dot{c}(t)] = K[J(t), \dot{c}(t)]$$

für alle  $t \in [0, t_0]$ . □

**Bemerkung.** Der Rauchsche Vergleichssatz gilt auch für Jacobifelder längs Geodätischer, die nicht nach der Bogenlänge parametrisiert sind, falls sie mit gleicher Geschwindigkeit durchlaufen werden. Denn ist  $J_v$  ein Jacobifeld längs  $c_v$ , so ist  $t \rightarrow J(\alpha t)$  ein Jacobifeld längs  $c_{\alpha v}$ .

## 8.2 Lokale Vergleichssätze

Der Rauchsche Vergleichssatz vergleicht die Geometrie zweier Mannigfaltigkeiten infinitesimal. Wir wollen nun daraus lokale Vergleichssätze herleiten.

Definiere für  $v \in T_p M$  mit  $v \neq 0$

$$K_+(v) = \max\{K(\sigma) \mid \sigma \subset T_p M \text{ Ebene mit } v \in \sigma \subset T_p M\}$$

$$K_-(v) = \min\{K(\sigma) \mid \sigma \subset T_p M \text{ Ebene mit } v \in \sigma \subset T_p M\}$$

Wie in Abschnitt 5.5 bezeichne mit  $J_{v,w}$  das Jacobifeld längs der Geodätischen  $c_v$  mit  $J_{v,w}(0) = 0$  und  $\frac{D}{dt} J_{v,w}(0) = w$ .

**Satz 8.2.1.** *Es seien  $M, \tilde{M}$  Mannigfaltigkeiten mit  $\dim M = \dim \tilde{M}$ ,  $p_0 \in M$ ,  $\tilde{p}_0 \in \tilde{M}$  und  $I : T_{p_0} M \rightarrow T_{\tilde{p}_0} \tilde{M}$  eine lineare Isometrie. Sei  $r > 0$ , so dass  $\exp_{p_0} : B(0_{p_0}, r) \rightarrow B(p_0, r)$  ein Diffeomorphismus ist und  $D \exp_{\tilde{p}_0}(v)$  für alle  $v \in B(0_{\tilde{p}_0}, r)$  maximalen Rang besitzt. Dann ist die Abbildung  $\varphi : B(p_0, r) \rightarrow B(\tilde{p}_0, r)$  definiert durch*

$$\varphi(x) = \exp_{\tilde{p}_0} \circ I \circ \exp_{p_0}^{-1}(x)$$

*ein lokaler Diffeomorphismus. Gilt zusätzlich  $\tilde{K}_-(\dot{c}_{Iv}(1)) \geq K_+(\dot{c}_v(1))$  für alle  $v \in B(0_{p_0}, r)$ , so folgt*

$$\|D\varphi(x)\xi\| \leq \|\xi\|$$

*für alle  $x \in B(p_0, r)$  und  $\xi \in T_x M$ .*

*Ist darüberhinaus  $\|D\varphi(x)\xi\| = \|\xi\|$  für  $x = \exp_{p_0}(v)$  und  $\xi = D \exp_{p_0}(v)(w)$  so erhalten wir*

(a)  $\|J_{v,w}(t)\| = \|J_{Iv,Iw}(t)\|$  für alle  $t \in [0, 1]$

(b)  $K[J_{v,w}(t), \dot{c}_v(t)] = \tilde{K}[J_{Iv,Iw}(t), \dot{c}_{Iv}(t)]$  für alle  $t \in [0, 1]$ .

**Bemerkung.** Die Abbildung  $\varphi$  ist immer (auch ohne Krümmungsvoraussetzungen) eine radiale Isometrie, denn für jeden Vektor  $\xi = \dot{c}_v(1) = D \exp_{p_0}(v)(v)$  mit  $c_v(1) = x \in B(p, r)$  gilt:

$$\|D\varphi(x)\xi\| = \|D\varphi(x)\dot{c}_v(1)\| = \|\dot{c}_{Iv}(1)\| = \|Iv\| = \|v\| = \|\xi\|.$$

Also ist  $D\varphi(x)$  eingeschränkt auf die radialen Tangentialvektoren eine Isometrie. Im Falle  $\xi = \dot{c}_v(1) = D \exp_{p_0}(v)(v)$  gilt:  $J_{v,w}(t) = t\dot{c}_v(t)$  und somit ist die Aussage (a) trivialerweise erfüllt. Die Aussage (b) ist in diesem Falle bedeutungslos, denn  $J_{v,w}(t)$  und  $\dot{c}_v(t)$  sind in diesem Falle linear abhängig.

*Beweis.* Wie in Satz 5.5.6, folgt aus  $\varphi \circ \exp_{p_0} = \exp_{\tilde{p}_0} \circ I$  mittels Kettenregel für alle  $v \in B(0_{p_0}, r)$  und  $w \in T_{p_0}M$ :

$$D\varphi(\exp_{p_0}(v)) \circ D \exp_{p_0}(v)(w) = D \exp_{\tilde{p}_0}(Iv)(Iw).$$

Außerdem gilt:

$$J_{v,w}(1) = D \exp_{p_0}(v)(w) \text{ und } D \exp_{\tilde{p}_0}(Iv)(Iw) = J_{Iv,Iw}(1).$$

Da  $\tilde{K}_-(\dot{c}_{Iv}(1)) \geq K_+(\dot{c}_{tv}(1))$  für alle  $v \in B(0_{p_0}, r)$ , und  $t \in (0, 1]$  gilt für alle Ebenen  $\tilde{\sigma} \subset T_{c_{Iv}(t)}\tilde{M}$  und  $\sigma \subset T_{c_v(t)}M$  die  $\dot{c}_{Iv}(t)$  bzw.  $\dot{c}_v(t)$  enthalten:  $\tilde{K}(\tilde{\sigma}) \geq K(\sigma)$ . Außerdem besitzt  $c_{Iv} : [0, 1] \rightarrow \tilde{M}$  keine konjugierten Punkte und es gilt:

$$\left\langle \frac{D}{dt} J_{v,w}(0), v \right\rangle = \langle w, v \rangle = \langle Iw, Iv \rangle = \left\langle \frac{D}{dt} J_{Iv,Iw}(0), Iv \right\rangle$$

sowie

$$\left\| \frac{D}{dt} J_{v,w}(0) \right\| = \|w\| = \|Iw\| = \left\| \frac{D}{dt} J_{Iv,Iw}(0) \right\|.$$

Daher folgt mit dem Rauchschen Vergleichssatz für  $x = \exp_{p_0}(v)$ :

$$\|D\varphi(x)(J_{v,w}(1))\| = \|J_{Iv,Iw}(1)\| \leq \|J_{v,w}(1)\|.$$

Da  $D \exp_{p_0}(v) : T_{p_0}M \rightarrow T_xM$  ein Isomorphismus ist, existiert zu jedem  $\xi \in T_xM$  genau ein  $w \in T_{p_0}M$  mit  $J_{v,w}(1) = D \exp_{p_0}(v)(w) = \xi$ .

Ist  $\|D\varphi(x)\xi\| = \|\xi\|$ , so ist  $\|J_{Iv,Iw}(1)\| = \|J_{v,w}(1)\|$  und der zweite Teil der Behauptung folgt unmittelbar aus dem zweiten Teil des Rauchschen Satzes.  $\square$

**Korollar 8.2.2.** *Unter den Voraussetzungen von Satz 8.2.1 ist*

$$\varphi := \exp_{\tilde{p}_0} \circ I \circ \exp_{p_0}^{-1} : B(p_0, r) \rightarrow B(\tilde{p}_0, r)$$

*längenverkürzend, d.h. ist  $\gamma : [0, a] \rightarrow B(p_0, r)$  eine differenzierbare Kurve, so gilt:*

$$L(\varphi \circ \gamma) \leq L(\gamma).$$

*Existiert für  $p_1, p_2 \in B(p_0, r)$  eine minimale Geodätische  $c : [0, 1] \rightarrow B(p_0, r)$ , die  $p_1$  mit  $p_2$  verbindet, so ist  $\varphi$  distanzverkürzend, d.h.*

$$d_{\tilde{M}}(\varphi(p_1), \varphi(p_2)) \leq d_M(p_1, p_2)$$

*Im Gleichheitsfalle ist  $\varphi \circ c : [0, 1] \rightarrow B(\tilde{p}_0, r)$  ebenfalls eine minimale Geodätische.*

*Beweis.* Aus Satz 8.2.1 folgt:

$$L(\varphi \circ \gamma) = \int_0^a \|D\varphi(\gamma(s))\dot{\gamma}(s)\| ds \leq \int_0^a \|\dot{\gamma}(s)\| ds = L(\gamma) \quad (8.1)$$

Ist  $p_1, p_2 \in B(p_0, r)$  und  $c : [0, 1] \rightarrow B(p_0, r)$  minimale Geodätische mit  $c(0) = p_1, c(1) = p_2$ , so gilt:

$$d_{\tilde{M}}(\varphi(p_1), \varphi(p_2)) \leq L(\varphi \circ c) \leq L(c) = d_M(p_1, p_2)$$

Ist  $d_{\tilde{M}}(\varphi(p_1), \varphi(p_2)) = L(\varphi \circ c)$  so ist  $\varphi \circ c$  minimal und es folgt aus (8.1) und Satz 8.2.1

$$\|D\varphi(c(s))(\dot{c}(s))\| = \|\dot{c}(s)\| = \|\dot{c}(0)\|.$$

Also ist  $\varphi \circ c$  eine minimale Kurve, die mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen wird. Daher ist wegen Korollar 3.2.9  $\varphi \circ c$  eine minimale Geodätische.  $\square$

**Bemerkung.** Ist  $0 \leq \delta \leq r$  und  $q_1 \in B(p_0, r - \delta)$  und  $q_2 \in B(q_1, \delta)$  so verläuft jede minimale Geodätische  $c : [0, a] \rightarrow M$ , die  $q_1$  mit  $q_2$  verbindet, ganz in  $B(p_0, r)$ , denn

$$d(p_0, c(t)) \leq d(p_0, q_1) + d(q_1, c(t)) < r$$

Entsprechendes gilt für alle  $q_1, q_2 \in B(p_0, r/2)$ . Man nennt  $B(p_0, r)$  strikt konvex, wenn für alle  $q_1, q_2 \in B(p_0, r)$  eine minimale Geodätische  $c : [0, 1] \rightarrow B(p_0, r)$  mit  $c(0) = q_1, c(1) = q_2$  existiert. Man kann zeigen, dass für  $r$  hinreichend klein,  $B(p_0, r)$  strikt konvex ist.

**Beispiel.** Sei  $M = \mathbb{R}^2$  der Euklidische  $\mathbb{R}^2$  und  $\tilde{M} = S^2$  die Sphäre von Radius 1 mit der von  $\mathbb{R}^3$  induzierten Metrik und  $0 \in \mathbb{R}^2$  der Ursprung und  $p_N$  der Nordpol auf  $S^2$ . Ist  $I : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_{p_N} S^2$  eine lineare Isometrie, so bildet

$$\varphi = \exp_{p_N} \circ I \circ \exp_0^{-1}$$

den Kreis  $\gamma_1$  von Radius  $\frac{\pi}{2}$  in  $\mathbb{R}^2$  auf den Äquator  $\gamma_2$  von  $S^2$  ab. Dann gilt:

$$L(\varphi \circ \gamma_1) = L(\gamma_2) = 2\pi < 2\pi \cdot \frac{\pi}{2} = \pi^2 = L(\gamma_1)$$

im Einklang mit obigem Korollar.

### 8.3 Dreiecksvergleichssätze

Nun wollen wir mit Hilfe des Rauchschen Vergleichssatzes Dreiecksvergleiche durchführen. Ist  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit,  $p_0 \in M$  und  $\alpha : [0, 1] \rightarrow T_{p_0} M$  eine Kurve in  $T_{p_0} M$ , so betrachte die Menge

$$\Delta_M(p_0, \alpha) := \{\exp_{p_0} t\alpha(s) \mid t, s \in (0, 1)\}.$$

Sie besteht aus der Vereinigung der radialen Geodätischen (bis auf ihre Randpunkte), die  $p_0$  mit  $\gamma(s) = \exp_{p_0} \alpha(s)$  verbinden.

Es seien wieder die am Anfang des Abschnittes 8.2 beschriebenen Voraussetzungen erfüllt,

d.h. es seien  $M, \tilde{M}$  Riemannsche Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension,  $\exp_{p_0} : B(0_{p_0}, r) \rightarrow B(p_0, r)$  sei ein Diffeomorphismus und  $D \exp_{\tilde{p}_0}(v)$  habe maximalen Rang für alle  $v \in B(0_{\tilde{p}_0}, r)$ . Zu einer gegebenen Isometrie  $I : T_{p_0}M \rightarrow T_{\tilde{p}_0}\tilde{M}$  betrachte den lokalen Diffeomorphismus  $\varphi : B(p_0, r) \rightarrow B(\tilde{p}_0, r)$  mit  $\varphi = \exp_{\tilde{p}_0} \circ I \circ \exp_{p_0}^{-1}$ .

Sei nun  $p_1, p_2 \in B(p_0, r)$  so gewählt, dass  $p_0, p_1, p_2$  nicht auf einer Geodätischen liegen, die ganz in  $B(p_0, r)$  verläuft und eine minimale Geodätische  $c : [0, 1] \rightarrow B(p_0, r)$  existiert, die  $p_1$  mit  $p_2$  verbindet. Diese ist dann insbesondere transversal zu den radialen Geodätischen in  $\Delta_M(p_0, \alpha)$  wobei  $\alpha = \exp_{p_0}^{-1} \circ c$ . Ausserdem ist die Abbildung  $h : (0, 1) \times (0, 1) \rightarrow B(p_0, r)$  mit  $h_s(t) = h(s, t) = \exp_{p_0} t\alpha(s)$  eine Einbettung (Geben Sie eine Begründung). Daher ist die Dreiecksfläche

$$\Delta_M(p_0, \alpha) = \{h(s, t) = \exp_{p_0} t\alpha(s) \mid t, s \in (0, 1)\}.$$

eine differenzierbare 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Ihr Rand in  $M$  besteht aus den drei minimalen Geodätischen  $c_{\alpha(0)} : [0, 1] \rightarrow M$ ,  $c_{\alpha(1)} : [0, 1] \rightarrow M$  sowie  $c : [0, 1] \rightarrow M$ . Da  $\varphi$  ein lokaler Diffeomorphismus ist, ist

$$\Delta_{\tilde{M}}(\tilde{p}_0, I\alpha) := \{\tilde{h}(s, t) = \exp_{\tilde{p}_0} tI\alpha(s) \mid s, t \in (0, 1)\} = \varphi(\Delta_M(p_0, \alpha))$$

ein immersiertes Flächenstück in  $M$ . Außerdem gilt für  $h_s(t) = h(s, t)$  und  $\tilde{h}_s(t) = \tilde{h}(s, t)$ : Zeichnung

$$L(h_s) = \|\alpha(s)\| = \|I\alpha(s)\| = L(\tilde{h}_s)$$

und

$$\sphericalangle(\alpha(0), \alpha(1)) = \sphericalangle(I\alpha(0), I\alpha(1))$$

Der Einfachheit halber schreiben wir im Folgenden  $\Delta_M$  statt  $\Delta_M(p_0, \alpha)$

**Satz 8.3.1.** *Ist  $\tilde{K}_-(\dot{c}_v(1)) \geq K_+(\dot{c}_v(1))$  für alle  $v \in B(0_{p_0}, r)$ , so folgt:*

$$d_{\tilde{M}}(\varphi(c(0)), \varphi(c(1))) \leq d_M(c(0), c(1)).$$

*Im Gleichheitsfalle ist  $\varphi \circ c$  ebenfalls eine minimale Geodätische und  $\varphi : \Delta_M \rightarrow \Delta_{\tilde{M}}$  eine lokale Isometrie bezüglich der durch  $M$  und  $\tilde{M}$  induzierten Riemannschen Metriken.*

*Beweis.* Alle Aussage bis auf die Behauptung, dass im Gleichheitsfalle  $\varphi : \Delta_M \rightarrow \Delta_{\tilde{M}}$  eine lokale Isometrie ist, folgen aus Korollar 8.2.2. Sei also  $c : [0, 1] \rightarrow B(p_0, r) \subset M$  eine minimale Geodätische mit  $c(s) = \exp_p(\alpha(s))$  und  $d_{\tilde{M}}(\varphi(c(0)), \varphi(c(1))) = d_M(c(0), c(1))$ . Dann folgt

$$\|D \exp_{p_0}(\alpha(s))\dot{\alpha}(s)\| = \|\dot{c}(s)\| = \|\widehat{\varphi \circ c}(s)\| = \|D \exp_{\tilde{p}_0}(I\alpha(s))I\dot{\alpha}(s)\|$$

Also folgt aus Satz 8.2.1 für die Jacobifelder  $J_{\alpha(s), \dot{\alpha}(s)}$  längs  $c_{\alpha(s)}$  und  $J_{I\alpha(s), I\dot{\alpha}(s)}$  längs  $c_{I\alpha(s)}$  für alle  $t \in [0, 1]$ :

$$\|J_{\alpha(s), \dot{\alpha}(s)}(t)\| = \|J_{I\alpha(s), I\dot{\alpha}(s)}(t)\|$$

Wir zeigen nun, dass  $\varphi : \Delta_M \rightarrow \Delta_{\tilde{M}}$  eine lokale Isometrie ist, d.h.  $\|D\varphi(x)\xi\| = \|\xi\|$  für alle  $\xi \in T_{h(s,t)}\Delta_M$ .

Da die Vektoren  $\frac{\partial h}{\partial s}(s, t), \frac{\partial h}{\partial t}(s, t)$  eine Basis von  $T_{h(s,t)}\Delta_M$  bilden und

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial s}(s, t) = \frac{\partial}{\partial s} \varphi \circ h(s, t) = D\varphi(h(s, t)) \frac{\partial h}{\partial s}(s, t)$$

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t}(s, t) = \frac{\partial}{\partial t} \varphi \circ h(s, t) = D\varphi(h(s, t)) \frac{\partial h}{\partial t}(s, t)$$

genügt es folgendes zu zeigen:

$$\left\| \frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} \right\|^2 = \left\| \frac{\partial h}{\partial t} \right\|^2, \quad \left\| \frac{\partial \tilde{h}}{\partial s} \right\|^2 = \left\| \frac{\partial h}{\partial s} \right\|^2$$

und

$$\left\langle \frac{\partial \tilde{h}}{\partial s}, \frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t} \right\rangle.$$

Aus  $\tilde{h}(s, t) = \exp_{\tilde{p}_0} tI\alpha(s)$  folgt:

$$\left\| \frac{\partial \tilde{h}}{\partial t}(s, t) \right\| = \|I\alpha(s)\| = \|\alpha(s)\| = \left\| \frac{\partial h}{\partial t}(s, t) \right\|$$

sowie

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \tilde{h}}{\partial s}(s, t) \right\| &= \|D \exp_{\tilde{p}_0}(tI\alpha(s))(tI\dot{\alpha}(s))\| = \|J_{I\alpha(s), I\dot{\alpha}(s)}(t)\| \\ &= \|J_{\alpha(s), \dot{\alpha}(s)}(t)\| = \left\| \frac{\partial h}{\partial s}(s, t) \right\| \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \tilde{h}}{\partial t}(s, t), \frac{\partial \tilde{h}}{\partial s}(s, t) \right\rangle &= \langle \dot{c}_{I\alpha(s)}(t), J_{I\alpha(s), I\dot{\alpha}(s)}(t) \rangle = t \left\langle \frac{D}{dt} J_{I\alpha(s), I\dot{\alpha}(s)}(0), I\alpha(s) \right\rangle \\ &= t \langle I\dot{\alpha}(s), I\alpha(s) \rangle = t \langle \dot{\alpha}(s), \alpha(s) \rangle = \langle \dot{c}_{\alpha(s)}(t), J_{\alpha(s), \dot{\alpha}(s)}(t) \rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial h}{\partial t}(s, t), \frac{\partial h}{\partial s}(s, t) \right\rangle \end{aligned}$$

□

Wenn eine der Mannigfaltigkeiten  $M, \tilde{M}$  eine Raumform  $M_k$  ist, d.h. eine einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit mit konstanter Krümmung  $k$ , so gilt im Gleichheitsfall eine stärkere Aussage. Da wir hauptsächlich an oberen Krümmungsschranken interessiert sind, werden wir nur den Fall betrachten, dass  $\tilde{M}$  eine Raumform ist.

**Bemerkung.** Ist  $E \subset T_p \tilde{M}$  ein linearer Unterraum, so ist  $\exp_p E \subset \tilde{M}$  totalgeodätisch. Zum Beweis betrachte die lineare Isometrie  $I : T_p \tilde{M} \rightarrow T_p \tilde{M}$  die durch Spiegelung an dem Unterraum  $E$  entsteht. Diese läßt sich dann, wie im Abschnitt über Raumformen gezeigt wurde, mit Hilfe der Exponentialabbildung zu einer Isometrie fortsetzen. Die Fixpunktmenge ist gerade  $\exp_p E \subset \tilde{M}$ . Ganz allgemein ist aber die Fixpunktmenge einer Isometrie, wie man leicht sieht, totalgeodätisch. Dazu betrachte in der Fixpunktmenge zwei Punkte deren Abstand so klein ist, dass sie sich durch eine eindeutig bestimmte minimale Geodätische verbinden lassen. Die Isometrie muss dann die Geodätischen punktweise auf sich abbilden und somit gehört sie ebenfalls der Fixpunktmenge an. Die detaillierte Begründung sei als Übung überlassen.

Insbesondere sind in Raumformen geodätische Dreiecksflächen totalgeodätisch.

Ist  $\tilde{p}_0 \in M_k$  so ist  $\exp_{\tilde{p}_0} : B(0_{\tilde{p}_0}, r) \rightarrow B(\tilde{p}_0, r)$  im Falle  $k \leq 0$  für alle  $r > 0$  und im Falle  $k > 0$  für alle  $r \leq \frac{\pi}{\sqrt{k}}$  ein Diffeomorphismus.

**Satz 8.3.2.** *Sei  $M$  Riemannsche Mannigfaltigkeit deren Schnittkrümmung  $K$  nach oben beschränkt ist, d.h. es existiert eine Konstante  $k \in \mathbb{R}$  mit  $K \leq k$ . Sei  $\exp_{p_0} : B(0_{p_0}, r) \rightarrow B(p_0, r)$  ein Diffeomorphismus, wobei  $r \leq \frac{\pi}{\sqrt{k}}$  falls  $k > 0$ . Ferner sei  $c : [0, 1] \rightarrow B(p_0, r)$  eine minimale nicht radiale Geodätische mit  $c(0) = p_1$  und  $c(1) = p_2$ . Wähle  $\tilde{p}_0 \in M_k$  und eine lineare Isometrie  $I : T_{p_0}M \rightarrow T_{\tilde{p}_0}M_k$ . Dann ist  $\varphi : B(p_0, r) \rightarrow B(\tilde{p}_0, r)$  mit  $\varphi(x) = \exp_{\tilde{p}_0} \circ I \circ \exp_{p_0}^{-1}(x)$  ein Diffeomorphismus mit*

$$d_{M_k}(\varphi(p_1), \varphi(p_2)) \leq d_M(p_1, p_2)$$

Gleichheit gilt dann und nur dann wenn die zu  $c$  und  $p_0$  gehörige Dreiecksfläche  $\Delta_M := \Delta_M(p_0, \exp_{p_0}^{-1}c) \subset M$  totalgeodätisch und isometrisch zu  $\Delta_{M_k} := \Delta_{M_k}(\tilde{p}_0, I \exp_{p_0}^{-1}c)$  ist.

*Beweis.* Es bleibt den Gleichheitsfall zu untersuchen. Hier bleibt noch zu zeigen, dass  $\Delta_M \subset M$  totalgeodätisch ist. Dazu betrachte  $q_1, q_2 \in \Delta_M$ , so dass die in  $M$  minimale Verbindungsgeodätische ganz in  $B(p_0, r)$  verläuft. Dann gilt

$$d_M(q_1, q_2) \leq d_{\Delta_M}(q_1, q_2) = d_{\Delta_{M_k}}(\varphi(q_1), \varphi(q_2)) = d_{M_k}(\varphi(q_1), \varphi(q_2)),$$

denn  $\varphi : \Delta_M \rightarrow \Delta_{M_k}$  ist eine Isometrie und  $\Delta_{M_k}$  ist totalgeodätische Untermannigfaltigkeit in  $M_k$ . Wegen Korollar 8.2.2 ist

$$d_{M_k}(\varphi(q_1), \varphi(p_2)) \leq d_M(q_1, q_2).$$

Ist daher  $c : [0, 1] \rightarrow \Delta_M$  minimale Geodätische in  $\Delta_M$  mit  $c(0) = q_1, c(1) = q_2$ , so gilt:  $L(c) = d_M(q_1, q_2)$ , d.h.  $c$  ist auch Geodätische in  $M$ . Somit ist  $\Delta_M$  totalgeodätisch.  $\square$

Nun wollen wir die bisherigen Resultate auf die Geometrie von Hadamardmannigfaltigkeiten, d.h. auf einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeiten nicht positiver Krümmung anwenden. Für Anwendungen auf Mannigfaltigkeiten mit unterer Schranke an die Krümmung siehe das Buch von Cheeger und Ebin und die dort beschriebenen Vergleichssätze von Toponogov.

Im Falle von Hadamardmannigfaltigkeiten ist  $\exp_p : T_pM \rightarrow M$  für alle  $p \in M$  ein Diffeomorphismus. Insbesondere existiert zu je zwei Punkten  $p_1, p_2 \in M$  nur eine Verbindungsgeodätische  $c : [0, 1] \rightarrow M$ , die dann natürlich auch minimal ist. Ist  $p_0$  ein weiterer Punkt in  $M$  so definiert

$$\Delta_M(p_0, p_1, p_2) := \Delta_M(p_0, \exp_{p_0}^{-1} \circ c)$$

eine Dreiecksfläche die von den Geodätischen, die die Eckpunkte  $p_0, p_1, p_2$  verbinden, berandet wird. Ist diese Fläche nicht entartet, d.h. liegen die Eckpunkte nicht alle auf einer Geodätischen, so ist  $\Delta_M(p_0, p_1, p_2)$  eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Ausserdem existiert zu positiven Zahlen  $l, l_1, l_2$  mit  $l_1 \leq l_2$  und  $l \leq l_1 + l_2$  sowie  $l_2 \leq l_1 + l$  Punkte  $p_0, p_1, p_2 \in M$  mit  $d(p_0, p_i) = l_i$  und  $d(p_1, p_2) = l$ . Denn ist  $p_0 \in M$  und  $v \in S_{p_0}M$ , so setze  $p_1 = \exp_{p_0}(l_1 v)$ . Definiere  $f : S_{p_0}M \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $f(w) = d(\exp_{p_0}(l_2 w), p_1)$ . Diese Funktion ist stetig mit  $f(v) = l_2 - l_1 \leq l$  und  $f(-v) = l_1 + l_2 \geq l$ . Da  $S_{p_0}M$  wegweise zusammenhängend ist, folgt der Beweis aus dem Zwischenwertsatz. Ist  $M$  zusätzlich eine Raumform so ist die zugehörige Dreiecksfläche bis auf Isometrie bestimmt.

Wir können nun den folgenden Satz über die Geometrie von Hadamardmannigfaltigkeiten beweisen.

**Satz 8.3.3.** (Trigonometrie von Hadamardmannigfaltigkeiten)

Sei  $(M, g)$  eine Hadamardmannigfaltigkeit mit  $K_M \leq k \leq 0$ . Es seien  $p_0, p_1, p_2 \in M$  Punkte, die nicht alle auf einer Geodätischen liegen. Dann ist  $\gamma = \sphericalangle_{p_0}(p_1, p_2) \in (0, \pi)$  und es folgt für  $l_i = d(p_i, p_0)$  und  $l = d(p_1, p_2)$

Zeichnung

$$k = 0 : \quad l^2 \geq l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 \cdot l_2 \cdot \cos \gamma$$

$$k < 0 : \quad \cosh(\sqrt{|k|} l) \geq \cosh(\sqrt{|k|} l_1) \cosh(\sqrt{|k|} l_2) - \sinh(\sqrt{|k|} l_1) \sinh(\sqrt{|k|} l_2) \cos(\gamma)$$

Ist  $\tilde{p}_0, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2 \in M_k$ , so gewählt, dass  $l_i = d(p_i, p_0) = d(\tilde{p}_i, \tilde{p}_0)$  für  $i \in \{1, 2\}$  und  $l = d(p_1, p_2) = d(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ , so gilt:

$$\tilde{\gamma} := \sphericalangle_{\tilde{p}_0}(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) \geq \sphericalangle_{p_0}(p_1, p_2) = \gamma.$$

Zeichnung

In allen Fällen gilt die Gleichheit dann und nur dann, falls die Dreiecksfläche  $\Delta_M(p_0, p_1, p_2)$  totalgeodätisch in  $M$  und isometrisch zu  $\Delta_{M_k}(\tilde{p}_0, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$  ist.

**Bemerkung.**  $\Delta_{M_k}(\tilde{p}_0, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2) \subset M_k^n$  ist auch isometrisch zu einem entsprechenden Dreieck in  $M_k^2$ .

*Beweis.* Ist  $p_0 \in M$ ,  $\tilde{p}_0 \in M_k$  und  $I : T_{p_0}M \rightarrow T_{\tilde{p}_0}M_k$  eine lineare Isometrie. Dann ist  $\varphi : M \rightarrow M_k$  mit  $\varphi(x) = \exp_{\tilde{p}_0} \circ I \circ \exp_{p_0}^{-1}$  ein Diffeomorphismus und es gilt für  $\tilde{p}_i = \varphi(p_i)$  für  $i \in \{1, 2\}$ :

$$l_i = d(p_i, p_0) = d(\tilde{p}_i, \tilde{p}_0)$$

sowie

$$\gamma = \sphericalangle_{p_0}(p_1, p_2) = \sphericalangle_{\tilde{p}_0}(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2).$$

Dann folgt aus Satz 8.3.2

$$\tilde{l} = d(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) \leq d(p_1, p_2) = l.$$

Aus den Cosinussätzen für Raumformen folgt dann für  $k = 0$

$$l^2 \geq \tilde{l}^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 \cdot l_2 \cdot \cos \gamma$$

und für  $k < 0$

$$\cosh(\sqrt{|k|} l) \geq \cosh(\sqrt{|k|} \tilde{l}) = \cosh(\sqrt{|k|} l_1) \cosh(\sqrt{|k|} l_2) - \sinh(\sqrt{|k|} l_1) \sinh(\sqrt{|k|} l_2) \cos(\gamma)$$

In beiden Fällen gilt die Gleichheit dann und nur dann, wenn  $\tilde{l} = l$  und damit ist wegen Satz 8.3.2 die Dreiecksfläche  $\Delta_M(p_0, p_1, p_2)$  totalgeodätisch und isometrisch zu  $\Delta_{M_k}(\tilde{p}_0, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$  ist. Sind  $\tilde{p}_0, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2 \in M_k$  so gewählt, dass  $l_i = d(p_i, p_0) = d(p_0, \tilde{p}_i)$  und  $l = d(p_1, p_2) = d(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ , so gilt für  $\tilde{\gamma} = \sphericalangle_{\tilde{p}_0}(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$  und  $\gamma = \sphericalangle_{p_0}(p_1, p_2)$  im Falle  $k = 0$ .

$$l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos \tilde{\gamma} = l^2 \geq l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos \gamma$$

und im Falle  $k < 0$ :

$$\begin{aligned} \cosh(\sqrt{|k|} l_1) \cosh(\sqrt{|k|} l_2) - \sinh(\sqrt{|k|} l_1) \sinh(\sqrt{|k|} l_2) \cos(\tilde{\gamma}) &= \cosh(\sqrt{|k|} l) \\ &\geq \cosh(\sqrt{|k|} l_1) \cosh(\sqrt{|k|} l_2) - \sinh(\sqrt{|k|} l_1) \sinh(\sqrt{|k|} l_2) \cos(\gamma). \end{aligned}$$

Daraus folgt in beiden Fällen:

$$\cos(\tilde{\gamma}) \leq \cos(\gamma).$$

Da  $\cos$  auf  $[0, \pi]$  monoton fallend ist, ist  $\tilde{\gamma} \geq \gamma$ .

Im Gleichheitsfall erhalten wir wieder mit obigen Argumenten, dass  $\Delta_M(p_0, p_1, p_2)$  totalgeodätisch und isometrisch zu  $\Delta_{M_k}(\tilde{p}_0, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$  ist.  $\square$

**Korollar 8.3.4.** Sei  $M$  eine Hadamardmannigfaltigkeit und die Punkte  $p_0, p_1, p_2 \in M$  liegen nicht auf einer Geodätischen. Seien  $\gamma_i := \sphericalangle_{p_i}(p_{i-1}, p_{i+1})$  mit  $i = 0, 1, 2 \pmod 3$  die Winkel des zugehörigen Dreieckes. Dann ist

$$\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 \leq \pi,$$

wobei die Gleichheit dann und nur dann gilt, falls  $\triangle_M(p_0, p_1, p_2)$  totalgeodätisch und isometrisch zu einem Dreieck in der Euklidischen Ebene  $\mathbb{R}^2$  ist.

Es seien  $p_0, p_1, p_2, p_3 \in M$ , so dass keine drei der vier Punkte auf einer einzigen Geodätischen liegen. Betrachte das geodätische Viereck, welches durch die vier Geodätischen Segmente  $c_i$ , die  $p_i$  mit  $p_{i+1}$  mit  $i = 0, 1, 2, 3 \pmod 4$  entsteht. Sei  $\gamma_i := \sphericalangle_{p_i}(p_{i-1}, p_{i+1})$  so gilt

$$\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \leq 2\pi.$$

Gleichheit gilt nur dann, falls die Seiten ein flaches totalgeodätisches Flächenstück beranden.

*Beweis.* Der Beweis folgt aus Satz 8.3.3 und ist als Übung überlassen. □

## 8.4 Volumenvergleich und Schnittkrümmung

**Definition 8.4.1.** Sei  $(M, g)$  eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $p \in M$ . und  $\rho : S_p M \rightarrow [0, \infty]$  die Schnittortfunktion. Dann heißt

$$\text{inj}_p(M) = \min\{\rho(v) \mid v \in S_p M\} \in [0, \infty]$$

der Injektivitätsradius von  $M$  in  $p$

**Bemerkung.** Wegen Satz 7.3.10 ist  $\exp_p : B(0_p, r) \rightarrow B(p, r)$  ein Diffeomorphismus für alle  $r \leq \text{inj}_p(M)$ .

Wie in Abschnitt 8.2 bezeichne für  $v \in T_p M$  mit  $v \neq 0$

$$K_+(v) = \max\{K(\sigma) \mid \sigma \subset T_p M \text{ Ebene mit } v \in \sigma \subset T_p M\}$$

$$K_-(v) = \min\{K(\sigma) \mid \sigma \subset T_p M \text{ Ebene mit } v \in \sigma \subset T_p M\}$$

Dann gilt:

**Lemma 8.4.2.** Es seien  $M, \tilde{M}$  Mannigfaltigkeiten mit  $\dim M = \dim \tilde{M}$ ,  $p \in M$ ,  $\tilde{p} \in \tilde{M}$

$$r < \min\{\text{inj}_p(M), \text{inj}_{\tilde{p}}(\tilde{M})\}$$

und  $I : T_p M \rightarrow T_{\tilde{p}} \tilde{M}$  eine lineare Isometrie mit

$$\tilde{K}_-(\dot{c}_{Iv}(1)) \geq K_+(\dot{c}_v(1))$$

für alle  $v \in B(0_p, r)$ . Ist  $\varphi : B(p, r) \rightarrow B(\tilde{p}, r)$  der Diffeomorphismus mit

$$\varphi(x) = \exp_{\tilde{p}} \circ I \circ \exp_p^{-1}(x)$$

so gilt: Ist  $\varphi : S(p, r) \rightarrow S(\tilde{p}, r)$  eine Isometrie, so ist auch  $\varphi : B(p, r) \rightarrow B(\tilde{p}, r)$  eine Isometrie.

*Beweis.* Ist  $\varphi : S(p, r) \rightarrow S(\tilde{p}, r)$  eine Isometrie, so gilt:  $\|D\varphi(x)\xi\| = \|\xi\|$  für alle

$$\xi \in T_x S(p, r) = \{w \in T_x M \mid w \perp \dot{c}_v(1), v = \exp_p^{-1} x \in S(0_p, r)\}.$$

Da  $\varphi$  eine radiale Isometrie ist, (denn  $D\varphi(x)\dot{c}_v(1) = \dot{c}_{Iv}(1)$ ) gilt:

$$\|D\varphi(x)\xi\| = \|\xi\| \text{ für alle } \xi \in T_x M \text{ mit } x \in S(p, r).$$

Dann gilt wegen Satz 8.2.1 für alle  $v \in T_p M$  mit  $\|v\| = r$  und  $w \in T_p M$ :

$$\|J_{v,w}(t)\| = \|J_{Iv,Iw}(t)\| \text{ für } t \in [0, 1].$$

Da

$$D\varphi(\exp_p vt) \circ D \exp_p(vt)(wt) = D \exp_{\tilde{p}}(tIv)(tIw)$$

ist

$$D\varphi(\exp_p vt)(J_{v,w}(t)) = J_{Iv,Iw}(t)$$

und daher ist  $\|D\varphi(x)v\| = \|v\|$  für alle  $v \in T_x M$  mit  $x \in B(p, r)$ .  $\square$

**Lemma 8.4.3.** Sei  $\varphi : M \rightarrow N$  ein Diffeomorphismus und es sei  $\|D\varphi(x)v\| \leq \|v\|$  für alle  $v \in T_x M$ . Dann gilt:

$$\text{vol } N \leq \text{vol } M.$$

Ist  $\text{vol } N = \text{vol } M$  so ist  $\varphi$  eine Isometrie.

*Beweis.* Ist  $\varphi : M \rightarrow N$  ein Diffeomorphismus, so gilt nach der Transformationsformel:

$$\text{vol}(N) = \int_N 1 dN = \int_M \text{Jac } \varphi(x) dM,$$

wobei  $\text{Jac } \varphi(x)$  die Jacobische Determinante ist. Sie lässt sich wie folgt berechnen:

Seien  $e_1, \dots, e_n \in T_x M, b_1, \dots, b_n \in T_{\varphi(x)} M$  ON-Basen und  $D\varphi(x)e_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} b_j$ . Dann ist für

$$A = (a_{ji})_{1 \leq j, i \leq n}$$

$$\text{Jac } \varphi(x) = |\det A|.$$

Außerdem gilt:  $\text{Jac } \varphi(x) = (\det(D\varphi(x)^T D\varphi(x)))^{1/2}$ , wobei  $D\varphi(x)^T : T_{\varphi(x)} N \rightarrow T_x M$  durch

$$\langle D\varphi(x)^T w, v \rangle = \langle w, D\varphi(x)v \rangle$$

definiert ist. Denn ist

$$D\varphi(x)^T D\varphi(x)(e_i) = \sum_{j=1}^n b_{ji} e_j$$

so folgt

$$\begin{aligned} b_{ji} &= \langle D\varphi(x)^T D\varphi(x)e_i, e_j \rangle = \langle D\varphi(x)e_i, D\varphi(x)e_j \rangle \\ &= \left\langle \sum_{k=1}^n a_{ki} b_k, \sum_{\ell=1}^n a_{\ell j} b_\ell \right\rangle = \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj} = (A^T A)_{ij} \end{aligned}$$

und somit gilt:  $\det(\varphi(x)^T D\varphi(x)) = \det A^T A = (\det A)^2$ .

Da  $\|D\varphi(x)v\| \leq \|v\|$  für alle  $v \in T_x M$ , folgt für  $L := D\varphi(x)^T D\varphi(x) : T_x M \rightarrow T_x M$ :

$$0 < \langle Lv, v \rangle = \langle D\varphi(x)^T D\varphi(x)v, v \rangle = \langle D\varphi(x)v, D\varphi(x)v \rangle \leq \langle v, v \rangle$$

Sind  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  die Eigenwerte des positiv definierten Endomorphismus  $L$ , so ist  $0 < \lambda_i \leq 1$  und somit

$$(\text{Jac } \varphi(x))^2 = \det L = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n \leq 1$$

Also gilt

$$\text{Jac } \varphi(x) \leq 1$$

und daher ist  $\text{vol } N \leq \text{vol } M$ . Im Gleichheitsfall sind alle Eigenwerte von  $L$  für jedes  $x \in M$  gleich 1 und somit

$$D\varphi(x)^T D\varphi(x) = \text{id}$$

Da

$$\langle D\varphi(x)^T D\varphi(x)v, v \rangle = \langle D\varphi(x)v, D\varphi(x)v \rangle$$

erhalten wir  $\|D\varphi(x)v\| = \|v\|$  für alle  $v \in T_x M$ , d.h.  $\varphi$  ist eine Isometrie  $\square$

In Korollar 8.2.2 hatten wir bewiesen, dass unter den Voraussetzungen von Lemma 8.4.2, die Abbildung  $\varphi : B(p, r) \rightarrow B(\tilde{p}, r)$  die Länge von Kurven verkürzt. Jetzt zeigen wir unter Benutzung obiger Resultate, dass  $\varphi$  das Volumen von Sphären verkleinert.

**Satz 8.4.4.** (*Bishop, Günther*)

Es seien  $M, \tilde{M}$  Mannigfaltigkeiten mit  $\dim M = \dim \tilde{M}$ ,  $p \in M$ ,  $\tilde{p} \in \tilde{M}$

$$r < \min\{\text{inj}_p(M), \text{inj}_{\tilde{p}}(\tilde{M})\}$$

und  $I : T_p M \rightarrow T_{\tilde{p}} \tilde{M}$  eine lineare Isometrie mit

$$\tilde{K}_-(\dot{c}_v(1)) \geq K_+(\dot{c}_v(1))$$

für alle  $v \in B(0_p, r)$ . Dann gilt:

$$\text{vol } S(p, r) \geq \text{vol } S(\tilde{p}, r).$$

Im Gleichheitsfall ist  $B(p, r)$  isometrisch zu  $B(\tilde{p}, r)$ .

*Beweis.* Die in 8.4.2 definierte Abbildung induziert einen Diffeomorphismus  $\varphi : S(p, r) \rightarrow S(\tilde{p}, r)$ . Wegen Satz 8.2.1 gilt  $\|D\varphi(x)v\| \leq \|v\|$ . Damit folgt wegen des Lemmas 8.4.3:  $\text{vol } S(\tilde{p}, r) \leq \text{vol } S(p, r)$  und im Gleichheitsfall ist  $\varphi : S(p, r) \rightarrow S(\tilde{p}, r)$  eine Isometrie. Wegen Lemma 8.4.2 ist dann auch  $\varphi : B(p, r) \rightarrow B(\tilde{p}, r)$  eine Isometrie.  $\square$

**Korollar 8.4.5.** Sei  $M$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit,  $\dim M = n$  und  $p \in M$ . Für  $k \in \mathbb{R}$  definiere

$$r_k = \min\{\text{inj}_p(M), \frac{\pi}{\sqrt{k}}\}$$

falls  $k > 0$  und  $r_k = \text{inj}_p(M)$ , falls  $k \leq 0$ . Ist  $K \leq k$  so gilt

$$\text{vol } S(p, r) \geq \omega_{n-1} s_k^{n-1}(r)$$

für alle  $r < r_k$ . Ist  $K \geq k$  so gilt

$$\text{vol } S(p, r) \leq \omega_{n-1} s_k^{n-1}(r)$$

für alle  $r < r_k$ . Dabei ist  $\omega_{n-1}$  das Volumen der Einheitskugel in  $\mathbb{R}^n$

*Beweis.* Dieses Korollar erhält man direkt aus dem Satz 8.4.4 von Bishop und Günther indem man  $M$  mit der Raumform  $M_k^n$  vergleicht. Ist  $p \in M_k^n$ , so ist  $\text{vol } S(p, r) = \omega_{n-1} s_k^{n-1}(r)$  für alle  $r \leq \frac{\pi}{\sqrt{k}}$   $\square$

**Korollar 8.4.6.** Sei  $k_1 \leq k_2 \leq 0$  und  $M$  eine  $n$ - dimensionale Hadamardmannigfaltigkeit, deren Schnittkrümmung die Ungleichung

$$k_1 \leq K \leq k_2$$

erfüllt. Dann gilt

$$\omega_{n-1} s_{k_2}^{n-1}(r) \leq \text{vol } S(p, r) \leq \omega_{n-1} s_{k_1}^{n-1}(r)$$

für alle  $r \geq 0$ .

## 8.5 Jacobitensoren

Eine weitere Anwendung des Rauchschen Satzes ist der Vergleich des Ballvolumen unter Verwendung unterer Krümmungsschranken an die Riccikrümmung. Aus diesem und auch aus anderen Gründen ist es nützlich,  $(1, 1)$ -Tensoren (insbesondere Jacobitensoren) längs Kurven zu betrachten.

**Definition 8.5.1.** Sei  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  eine differenzierbare Kurve. Ein  $(1, 1)$ -Tensor  $X$  längs  $\gamma$  ist eine Kurve  $t \rightarrow X(t) \in \text{End}(T_{\gamma(t)}M)$ .

$X$  heißt differenzierbar, falls für alle parallelen Vektorfelder  $E(t)$  längs  $\gamma$  das Vektorfeld  $t \rightarrow X(t)E(t) \in T_{c(t)}M$  differenzierbar ist. Ist  $v \in T_{c(t_0)}M$  und  $v(t)$  die parallele Fortsetzung von  $v$  längs  $\gamma$ , so heißt

$$X'(t_0)v = \left. \frac{D}{dt} \right|_{t=t_0} X(t)v(t)$$

die Ableitung von  $X$  an der Stelle  $t_0$ . Ist  $X$  differenzierbar längs  $\gamma$ , so ist  $X'(t)$  wieder ein  $(1, 1)$ -Tensor längs  $\gamma$  (Übung).

**Beispiel.** Ist  $M$  Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $c : \mathbb{R} \rightarrow M$  eine Geodätische, so induziert der Krümmungstensor  $R$  einen  $(1, 1)$ -Tensor längs  $c$ , durch  $R(t)w := R(w, \dot{c}(t))\dot{c}(t)$  für  $w \in T_{c(t)}M$ . Der  $(1, 1)$ -Tensor  $R(t)$  ist sogar symmetrisch, d.h.  $R(t) \in \text{Sym}(T_{c(t)}M)$  bezüglich der Riemannschen Metrik.

**Definition 8.5.2.** (Jacobitensoren)

Ein  $(1, 1)$ -Tensor  $X$  längs einer Geodätischen  $c : \mathbb{R} \rightarrow M$  heißt Jacobitensor genau dann, wenn

$$X''(t) + R(t)X(t) = 0$$

**Lemma 8.5.3.** Sei  $c : \mathbb{R} \rightarrow M$  eine Geodätische

- (a) Ist  $X$  ein  $(1, 1)$ -Tensor längs  $c$ , so gilt:  $X$  ist genau dann ein Jacobitensor, falls  $J(t) := X(t)E(t)$  ein Jacobifeld für alle parallelen Vektorfelder  $E$  längs  $c$  ist.
- (b) Sei  $A, B \in \text{End}(T_{c(0)}M)$ . Dann existiert genau ein Jacobitensor  $X$  mit  $X(0) = A$  und  $X'(0) = B$ .

*Beweis.*(zu a) Sei  $X$  ein  $(1, 1)$ -Tensor. Nach Definition ist  $X$  genau dann ein Jacobitensor falls

$$X''(t) + R(t)X(t) = 0.$$

Dies ist wiederum äquivalent zu

$$X''(t)E(t) + R(t)X(t)E(t) = 0$$

für alle parallelen Felder  $E$  längs  $c$ . Nach Definition der Ableitung eines  $(1, 1)$ -Tensors und der Definition von  $R(t)$  folgt, die Äquivalenz zu

$$\frac{D^2}{dt^2}(X(t)E(t)) + R(X(t)E(t), \dot{c}(t))\dot{c}(t) = 0$$

für alle parallelen Felder  $E$ . Dies bedeutet aber:

$$X(t)E(t) = J(t)$$

ist ein Jacobifeld für alle parallelen Felder  $E$  längs  $c$ .

(zu b) Seien  $A, B \in \text{End}(T_{c(0)}M)$  und  $v \in T_{c(0)}M$ . Sei  $J(t)$  das Jacobifeld längs  $c$  mit  $J(0) = A(v)$  und  $\frac{D}{dt}J(0) = B(v)$ . Definiere  $X(t)v(t) = J(t)$ , falls  $v(t)$  parallele Fortsetzung von  $v$  längs  $c$  darstellt. Dann ist  $X(t)$  ein differenzierbarer  $(1, 1)$ -Tensor und wegen (a) ist  $X$  ein Jacobitensor mit den Anfangswerten:

$$X(0)v = A(v), \quad X'(0)v = \frac{D}{dt}J(0) = B(v).$$

Die Eindeutigkeit folgt aus der eindeutigen Abhängigkeit der Jacobifelder von den Anfangsdaten. □

**Bemerkung.** Ist  $p \in M$ , so gilt für alle  $v, w \in T_pM$

$$D \exp_p(tv)(tw) = X(t)w(t),$$

wobei  $X$  Jacobitensor längs  $c_v$  mit  $X(0) = 0, X'(0) = \text{id}$  und  $w(t)$  parallele Fortsetzung von  $w = w(0)$  längs  $c_v(t)$  ist. Dies folgt, denn

$$D \exp_p(tv)(tw) = J(t),$$

wobei  $J$  das Jacobifeld längs  $c_v$  ist, mit  $J(0) = 0$  und  $\frac{D}{dt}J(0) = w$ .

Da  $X(0)w(0) = 0$  und  $\frac{D}{dt}|_{t=0}X(t)w(t) = X'(0)w = w$ , folgt die Behauptung.

**Lemma 8.5.4.** Sei  $c : \mathbb{R} \rightarrow M$  eine Geodätische und sind  $A, B \in \text{End}(\dot{c}^\perp(0))$ . Ist  $X(t)$  der Jacobitensor längs  $c$  mit  $X(0)v = Av$  und  $X'(0)v = Bv$  für alle  $v \in \dot{c}^\perp(0)$ , so ist  $X(t)v(t) \in \dot{c}^\perp(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ , d.h.  $X(t) \in \text{End}(\dot{c}^\perp(t))$ .

*Beweis.* Der Beweis folgt aus den entsprechenden Eigenschaften der Jacobifelder, denn ist  $J$  ein Jacobifeld längs der Geodätischen  $c$  mit  $J(0) \perp \dot{c}(0)$  und  $\frac{D}{dt}J(0) \perp \dot{c}(0)$ , so ist  $J(t) \perp \dot{c}(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Daher gilt: Sind  $A, B \in \text{End}(\dot{c}^\perp(0))$  und  $X(t)$  Jacobitensor längs  $c$  mit  $X(0)v = Av$  und  $X'(0)v = Bv$  für alle  $v \in \dot{c}^\perp(0)$ , so ist  $X(t)v(t) \in \dot{c}^\perp(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ , d.h.  $X(t) \in \text{End}(\dot{c}^\perp(t))$ . Außerdem gilt:  $R(t)(\dot{c}^\perp(t)) \subset \dot{c}^\perp(t)$ . □

Jacobitensoren eignen sich insbesondere zur Volumenberechnung. Wir hatten bewiesen:  
Ist  $\rho : S_p M \rightarrow [0, \infty]$  die Schnittortfunktion, d.h.

$$\rho(v) = \sup\{t > 0 \mid d(\exp_p tv, p) = t\}$$

und

$$U(p) = \{tv \mid v \in S_p M, 0 \leq t < \rho(v)\},$$

so gilt für alle integrierbaren Funktionen  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_M f dM = \int_{S_p M} \int_0^{\rho(v)} f(\exp_p tv) J(v, t) dt dS_p M(v),$$

wobei

$$J(v, t) = \sqrt{\det \langle J_i(t), J_j(t) \rangle_{1 \leq i, j \leq n-1}}$$

und  $J_i$  orthogonale Jacobifelder längs  $c_v$  bezeichnen mit  $J_i(0) = 0, \frac{D}{dt} J_i(0) = b_i$  für eine ON-Basis  $b_1, \dots, b_{n-1} \in T_v(S_p M) \cong v^\perp$ .

Sei  $A_v$  der orthogonale Jacobitensor längs  $c_v$  mit  $A_v(0) = 0, A'_v(0) = \text{id} \in \text{End}(v^\perp)$ . Dann gilt:  $J_i(t) = A_v(t)b_i(t)$  und

$$\begin{aligned} J(v, t) &= \sqrt{\det \langle A_v(t)b_i(t), A_v(t)b_j(t) \rangle_{1 \leq i, j \leq n-1}} = \sqrt{\det \langle A_v^T(t)A_v(t)b_i(t), b_j(t) \rangle_{1 \leq i, j \leq n-1}} \\ &= \sqrt{\det A_v^T(t)A_v(t)} = |\det A_v(t)| \end{aligned}$$

Also folgt:

$$\int_M f dM = \int_{S_p M} \int_0^{\rho(v)} f(\exp_p tv) |\det A_v(t)| dt dS_p M(v).$$

**Beispiel.** Sei  $M_k$  Raumform mit konstanter Krümmung  $k$  und  $s_k$  die verallgemeinerte ‘Sinus-Funktion’, d.h. Lösung der Differentialgleichung  $s_k'' + k s_k = 0$  mit  $s_k(0) = 0$  und  $s_k'(0) = 1$ . Dann ist  $A_v(t)w(t) = s_k(t)w(t)$ , wobei  $w(t) \perp \dot{c}_v(t)$  ein paralleles orthogonales Vektorfeld längs  $c_v$  bezeichnet.

**Bemerkung.** Ist  $0 < r < \text{inj}_p(M)$ , so ist  $S(p, r) = \exp_p(S(0_p, r)) = \{q \in M \mid d(p, q) = r\}$  eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von  $M$  und es gilt:

$$\text{vol } S(p, r) = \int_{S_p M} |\det A_v(r)| dS_p M(v).$$

## 8.6 Volumenvergleich und Riccikrümmung

Nun wollen wir Volumenvergleichssätze bei unterer Schranke an die Ricci-Krümmung herleiten. Dafür benötigen wir folgendes Lemma. Dabei bezeichnen wir im Folgenden mit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  statt mit  $s_k$  die Lösung der Differentialgleichung  $f'' + kf = 0$  mit  $f(0) = 0, f'(0) = 1$ .

**Lemma 8.6.1.** Sei  $(M, g)$  eine  $n$ -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit und

$$\text{ric} \geq (n-1)k$$

für ein  $k \in \mathbb{R}$ . Sei  $c : [0, a] \rightarrow M$  eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische ohne konjugierte Punkte mit  $a < \frac{\pi}{\sqrt{k}}$  falls  $k > 0$ . Sei  $A$  der zu  $c$  orthogonale Jacobitensor mit  $A(0) = 0, A'(0) = \text{id}$ . Dann gilt:

(1) Die Funktion

$$\frac{\det A(t)}{f^{n-1}(t)}$$

ist monoton fallend und

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\det A(t)}{f^{n-1}(t)} = 1.$$

(2)  $\det A(t) \leq f^{n-1}(t)$  für alle  $t \in [0, a]$ .

Gilt  $\det A(t_0) = f^{n-1}(t_0)$ , so folgt:

$$A(t) = f(t) \text{id}_t : \dot{c}(t)^\perp \rightarrow \dot{c}^\perp(t)$$

für  $0 \leq t \leq t_0$ , wobei  $\text{id}_t$  die Identität auf  $\dot{c}(t)^\perp$  bezeichnet.

**Bemerkung.**  $f(t) \text{id}_t$  ist der Jacobitensor für die Metrik mit konstanter Krümmung  $k$ .

*Beweis.* Da

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{A(t)}{t} = A'(0)$$

folgt

$$A(t) = t(\text{id} + B(t))$$

mit  $B(t) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow 0$ , Ausserdem ist  $f(t) = t(1 + b(t))$  mit  $b(t) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow 0$ . Dies impliziert

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\det A(t)}{f^{n-1}(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^{n-1} \det(\text{id} + B(t))}{t^{n-1} (1 + b(t))^{n-1}} = 1$$

Betrachte für  $t \leq a$  längs der Geodätischen  $c : [0, t] \rightarrow M$  das Jacobifeld  $J(s) = A(s)w(s)$ , wobei  $w$  das parallele Vektorfeld längs  $c$  ist mit  $w(t) = A^{-1}(t)v$  wobei  $v \in \dot{c}^\perp(t)$ .

Ist  $v(s)$  die parallele Fortsetzung von  $v = v(t)$ , so definiert

$$X(s) = \frac{f(s)}{f(t)} v(s)$$

ein Vektorfeld längs  $c_{[0,t]}$  mit  $J(0) = X(0) = 0$  und  $J(t) = v = X(t)$ .

Aus der Minimaleigenschaft von Jacobifeldern folgt (siehe 7.5.4):

$$I_c(J, J) \leq I_c(X, X)$$

und somit

$$\left\langle \frac{D}{dt} J(t), J(t) \right\rangle \leq \int_0^t \left\langle \frac{D}{ds} X(s), \frac{D}{ds} X(s) \right\rangle - \langle R(X(s), \dot{c}(s)) \dot{c}(s), X(s) \rangle ds.$$

Also erhalten wir:

$$\langle A'(t)A^{-1}(t)v, v \rangle \leq \int_0^t \left( \frac{f'(s)}{f(s)} \right)^2 - \frac{f^2(s)}{f^2(t)} \langle R(v(s), \dot{c}(s))\dot{c}(s), v(s) \rangle ds.$$

Sei  $e_1, \dots, e_{n-1} \in \dot{c}^\perp(t)$  eine ON-Basis. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} A'(t)A^{-1}(t) &= \sum_{i=1}^{n-1} \langle A'(t)A^{-1}(t)e_i(t), e_i(t) \rangle \\ &\leq \frac{1}{f^2(t)} \int_0^t (n-1)(f'(s)^2 - f^2(s)k) ds \\ &= \frac{n-1}{f^2(t)} \left( f' \cdot f \Big|_0^t - \int_0^t f''f + f^2k ds \right) \\ &= (n-1) \frac{f'(t)}{f(t)}, \end{aligned}$$

denn  $f'' = -kf$ . Da

$$\frac{d}{dt} \log \det A(t) = \operatorname{tr} A'(t)A^{-1}(t) \leq (n-1) \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{d}{dt} \log f^{n-1}(t)$$

folgt:

$$\frac{d}{dt} \log \frac{\det A(t)}{f^{n-1}(t)} \leq 0.$$

Also ist

$$\frac{\det A(t)}{f^{n-1}(t)}$$

monoton fallend für alle  $t \in [0, a]$  und somit ist (1) bewiesen.

Da  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\det A(t)}{f^{n-1}(t)} = 1$ , folgt daraus auch (2). Sei nun  $\det A(t_0) = f^{n-1}(t_0)$  für ein  $t_0 \leq a$ . Dann ist

$$\frac{d}{dt} \log \frac{\det A(t)}{f^{n-1}(t)} = 0$$

für alle  $t \in [0, t_0]$ . Ist

$$J_i(s) = A(s)w_i(s)$$

wobei  $w_i(s)$  die parallele Fortsetzung von  $w_i(t_0) = A^{-1}(t_0)e_i$  ist und  $e_i, \dots, e_{n-1}$  ist eine ON-Basis von  $\dot{c}^\perp(t_0)$ . Sei

$$X_i(s) = \frac{f(s)}{f(t_0)} e_i(s)$$

so folgt aus obigen Überlegungen

$$I_{c|_{[0, t_0]}}(J_i, J_i) = I_{c|_{[0, t_0]}}(X_i, X_i).$$

Daher ist wegen Korollar 7.5.4

$$A(s)w_i(s) = J_i(s) = X_i(s) = \frac{f(s)}{f(t_0)}e_i(s)$$

und wir erhalten:

$$w_i(0) = A'(0)w_i(0) = X'_i(0) = \frac{1}{f(t_0)}e_i(0).$$

Da  $w_i(s)$  und  $e_i(s)$  parallel sind, folgt

$$w_i(s) = \frac{e_i(s)}{f(t_0)},$$

und daher ist

$$A(s)e_i(s) = f_i(t_0)A(s)e_i(s) = f(s)e_i(s).$$

Da  $e_1(s), \dots, e_{n-1}(s)$  eine Basis von  $\dot{c}^\perp(s)$  ist, folgt:  $A(s) = f(s)\text{id}_s$ .  $\square$

Sei nun  $M_k^n$  die  $n$ -dimensionale Raumform mit konstanter Krümmung  $k$  und bezeichne mit  $V_k^n(r)$  das Volumen eines Balls vom Radius  $r$ , wobei  $r \leq \frac{\pi}{\sqrt{k}}$ , falls  $k > 0$ . Dann ist

$$V_k^n(r) = \omega_{n-1} \int_0^r f^{n-1}(t) dt$$

**Satz 8.6.2.** (*Bishop*)

Es sei  $(M, g)$  eine  $n$ -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit

$$\text{ric} \geq (n-1)k,$$

für ein  $k \in \mathbb{R}$ , und  $r \leq \frac{\pi}{\sqrt{k}}$ , falls  $k > 0$ . Dann folgt:

$$\text{vol } B(p, r) \leq V_k^n(r).$$

Ist  $\text{vol } B(p, r) = V_k^n(r)$ , und  $\tilde{p} \in M_k^n$  so ist  $B(p, r)$  isometrisch zu  $B(\tilde{p}, r)$ .

*Beweis.* Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die Funktion mit  $f''(t) + kf = 0$  und  $f(0) = 0, f'(0) = 1$ , und  $A_v$  der orthogonale Jacobitensor längs  $c_v$  mit  $A_v(0) = 0$  und  $A'_v(0) = \text{id}$ . Dann folgt aus Lemma 8.6.1

$$\begin{aligned} \text{vol } B(p, r) &= \int_M \chi_{B(p,r)} dM = \int_{S_p^{n-1}} \int_0^{\rho(v)} \chi_{B(p,r)}(\exp_p(tv)) \det A_v(t) dt dS_p M(v) \\ &= \int_{S_p^{n-1}} \int_0^{\min\{\rho(v), r\}} \det A_v(t) dt dS_p M(v) \\ &\leq \int_{S_p^{n-1}} \int_0^{\min\{\rho(v), r\}} f^{n-1}(t) dt dS_p M(v) \\ &\leq \int_{S_p^{n-1}} \int_0^r f^{n-1}(t) dt dS_p M(v) = V_k^n(r) \end{aligned}$$

Ist  $\text{vol } B(p, r) = V_k^n(r)$  so folgt  $\min\{\rho(v), r\} = r$  für alle  $v \in S_p M$  und  $\det A_v(t) = f^{n-1}(t)$  und somit  $A_v(t) = f(t) \text{id}_t$  für alle  $t \in [0, r]$ .

Ist dann  $\tilde{p} \in M_k^n$  und  $I : T_p M \rightarrow T_{\tilde{p}} M_k^n$  so ist  $\varphi = \exp_{\tilde{p}} \circ I \circ \exp_p : B(p, r) \rightarrow B(\tilde{p}, r)$  eine Isometrie.  $\square$

**Korollar 8.6.3.** (Gromov)

Sei  $(M, g)$  eine  $n$ -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit

$$\text{ric} \geq (n-1)k$$

für ein  $k \in \mathbb{R}$ . Dann ist

$$g(r) = \frac{\text{vol } B(p, r)}{V_k^n(r)}$$

monoton fallend für  $0 \leq r \leq \frac{\pi}{\sqrt{k}}$ , falls  $k > 0$  und für alle  $r$ , falls  $k \leq 0$ .

*Beweis.*

$$V_k^n(r) = \int_{S_{\tilde{p}} M} \int_0^r f^{n-1}(t) dt dS_p M = w_{n-1} \int_0^r f^{n-1}(t) dt$$

wobei  $w_{n-1}$  das Volumen der Sphäre  $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  bezeichnet.

$$g(r) = \frac{\int_{S_p M} \int_0^{\min\{r, \rho(v)\}} \det A_v(t) dt dS_p M}{w_{n-1} \int_0^r f^{n-1}(t) dt}.$$

Es genügt zu zeigen:

$$\frac{\int_0^r \det A_v(t) dt}{\int_0^r f^{n-1}(t) dt}$$

ist monoton fallend für  $r \leq \rho(v)$ , denn der Zähler von  $g$  bleibt für  $r > \rho(v)$  konstant und der Nenner ist monoton steigend. Da wegen Lemma 8.6.1 die Funktion  $\frac{\det A_v(t)}{f^{n-1}(t)}$  auf  $[0, \rho(v)]$  monoton fallend ist, folgt das Korollar aus folgendem Lemma.  $\square$

**Lemma 8.6.4.** (Gromov)

Es seien  $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  positive und integrierbare Funktionen: Sei für  $r_0 > 0$  die Funktion  $\frac{a(t)}{b(t)}$  auf  $[0, r_0]$  monoton fallend. Dann ist auch

$$g(r) = \frac{\int_0^r a(t) dt}{\int_0^r b(t) dt}$$

auf  $[0, r_0]$  monoton fallend.

*Beweis.* Betrachte

$$g(r) = \frac{\int_0^r \frac{a(t)}{b(t)} b(t) dt}{\int_0^r b(t) dt}.$$

Sei  $r < R \leq r_0$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} g(R) &= \frac{\int_0^r \frac{a(t)}{b(t)} b(t) dt + \int_r^R \frac{a(t)}{b(t)} b(t) dt}{\int_0^r b(t) dt + \int_r^R b(t) dt} = g(r) \frac{1 + \frac{\int_r^R \frac{a(t)}{b(t)} b(t) dt}{\int_0^r \frac{a(t)}{b(t)} b(t) dt}}{1 + \frac{\int_r^R b(t) dt}{\int_0^r b(t) dt}} \\ &\leq g(r) \frac{1 + \frac{\frac{a(r)}{b(r)} \int_r^R b(t) dt}{\frac{a(r)}{b(r)} \int_0^r b(t) dt}}{1 + \frac{\int_r^R b(t) dt}{\int_0^r b(t) dt}} = g(r). \end{aligned}$$

□

Nun wollen wir den Starrheitsfall im Satz von Bonnet-Myers behandeln. Diesen Satz haben wir in 4.4.1 formuliert und bewiesen. Er lautet:

Ist  $(M^n, g)$  vollständige  $n$ -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit

$$\text{ric} \geq (n - 1)k$$

für ein  $k > 0$ . Dann gilt

$$\text{diam } M = \max_{p, q \in M} d(p, q) \leq \frac{\pi}{\sqrt{k}}.$$

**Satz 8.6.5.** *Ist  $M$  eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit*

$$\text{ric} \geq (n - 1)k > 0$$

und

$$\text{diam } M = \frac{\pi}{\sqrt{k}}.$$

Dann ist  $M$  isometrisch zu  $M_k^n = S^n(\frac{1}{\sqrt{k}}) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , d.h. zur Standardsphäre mit Radius  $\frac{1}{\sqrt{k}}$ .

**Bemerkung.** Der obige Satz wurde 1975 von Cheng bewiesen. Unter der stärkeren Voraussetzung  $K \geq k$  an die Schnittkrümmung von  $M$  stammt der Satz von Toponogov (1959).

*Beweis.* Da  $\text{diam } M = \frac{\pi}{\sqrt{k}}$ , gibt es  $p, q \in M$  mit  $d(p, q) = \frac{\pi}{\sqrt{k}}$ . Daraus folgt mit Hilfe von Korollar 8.6.3:

$$\frac{\text{vol } B(p, \frac{\pi}{2\sqrt{k}})}{\frac{1}{2} \text{vol } M_k^n} = \frac{\text{vol } B(p, \frac{\pi}{2\sqrt{k}})}{V_k^n(\frac{\pi}{2\sqrt{k}})} \geq \frac{\text{vol } B(p, \frac{\pi}{\sqrt{k}})}{V_k^n(\frac{\pi}{\sqrt{k}})} = \frac{\text{vol } M}{\text{vol } M_k^n} \tag{8.2}$$

Also erhalten wir:

$$\text{vol } B(p, \frac{\pi}{2\sqrt{k}}) \geq \frac{1}{2} \text{vol } M$$

und mit den gleichen Argumenten folgt

$$\text{vol } B(q, \frac{\pi}{2\sqrt{k}}) \geq \frac{1}{2} \text{vol } M.$$

Da das Innere der Bälle  $B(p, \frac{\pi}{2\sqrt{k}})$  und  $B(q, \frac{\pi}{2\sqrt{k}})$  disjunkt ist, folgt

$$\text{vol}(B(p, \frac{\pi}{2\sqrt{k}}) \cap B(q, \frac{\pi}{2\sqrt{k}})) = 0$$

und somit

$$\text{vol } B(p, \frac{\pi}{2\sqrt{k}}) + \text{vol } B(q, \frac{\pi}{2\sqrt{k}}) = \text{vol}(B(p, \frac{\pi}{2\sqrt{k}}) \cup B(q, \frac{\pi}{2\sqrt{k}})) \leq \text{vol } M.$$

Wir erhalten:

$$\text{vol } B(p, \frac{\pi}{2\sqrt{k}}) = \text{vol } B(q, \frac{\pi}{2\sqrt{k}}) = \frac{1}{2} \text{vol } M.$$

Also gilt wegen (8.2)

$$\frac{\text{vol } M}{\text{vol } M_k^n} = \frac{\text{vol } B(p, \frac{\pi}{2\sqrt{k}})}{V_k^n(\frac{\pi}{2\sqrt{k}})} = \frac{\text{vol } B(p, \frac{\pi}{\sqrt{k}})}{V_k^n(\frac{\pi}{\sqrt{k}})}.$$

Entsprechendes gilt, falls wir  $p$  durch  $q$  ersetzen.

Aus Korollar 8.6.3 von Gromov schliessen wir:

$$\frac{\text{vol } B(p, r)}{V_k^n(r)} = \frac{\text{vol } B(q, r)}{V_k^n(r)} = \frac{\text{vol } M}{\text{vol } M_k^n} =: a$$

für  $r \in [\frac{\pi}{2\sqrt{k}}, \frac{\pi}{\sqrt{k}}]$ . Zu zeigen bleibt:  $a = 1$ . Dann folgt  $\text{vol } B(p, \frac{\pi}{\sqrt{k}}) = V_k^n(\frac{\pi}{\sqrt{k}})$  und wegen des Satzes 8.6.2 von Bishop ist  $M = B(p, \frac{\pi}{\sqrt{k}})$  isometrisch zu  $M_k^n = B(\tilde{p}, \frac{\pi}{\sqrt{k}})$  für  $\tilde{p} \in M_k^n$ .

Sei zunächst  $r < \frac{\pi}{2\sqrt{k}}$ . Dann gilt:

$$\text{vol}(B(p, r) \cap B(q, \frac{\pi}{\sqrt{k}} - r)) = 0$$

und wir erhalten aus Korollar 8.6.3

$$a \leq \frac{\text{vol } B(p, r)}{V_k^n(r)} \leq \frac{\text{vol } M - \text{vol } B(q, \frac{\pi}{\sqrt{k}} - r)}{\text{vol } M_k^n - V_k^n(\frac{\pi}{\sqrt{k}} - r)} = \frac{a \text{vol } M_k^n - a V_k^n(\frac{\pi}{\sqrt{k}} - r)}{\text{vol } M_k^n - V_k^n(\frac{\pi}{\sqrt{k}} - r)} = a.$$

Da

$$\frac{\det A_v(t)}{f^{n-1}(t)} \rightarrow 1$$

für  $t \rightarrow 0$ , folgt

$$a = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{vol } B(p, r)}{V_k^n(r)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{S_p^{n-1}} \int_0^r \det A_v(t) dt dS_p M}{w_{n-1} \int_0^r f^{n-1}(t) dt} = 1.$$

□

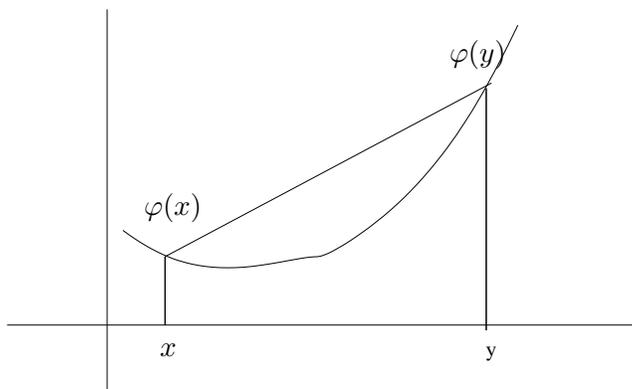
## Kapitel 9

# Mannigfaltigkeiten nicht positiver Krümmung

### 9.1 Konvexitätseigenschaften von Hadamardmannigfaltigkeiten

**Definition 9.1.1.** Eine stetige Funktion  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt genau dann konvex, falls für alle  $x < y$  und  $t \in [0, 1]$  gilt:

$$\varphi(x + t(y - x)) \leq \varphi(x) + t(\varphi(y) - \varphi(x))$$



**Bemerkung.** Ist  $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ , so ist  $\varphi''(x) \geq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  äquivalent zur Konvexität.

**Definition 9.1.2.** Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine stetige Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  heißt konvex, wenn für alle Geodätischen  $c : \mathbb{R} \rightarrow M$  die Funktion

$$f \circ c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

konvex ist.

**Definition 9.1.3.** Ist  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar, so heißt das durch die Gleichung

$$Df(p)v = \langle \text{grad } f(p), v \rangle$$

eindeutig bestimmte Vektorfeld  $\text{grad } f$  der Gradient von  $f$ . Ist  $f \in C^2(M)$ , so heißt die Bilinearform

$$D^2f(p)(v, w) := \langle \nabla_v \text{grad } f(p), w \rangle$$

die Hessesche von  $f$ .

**Bemerkung.** Ist  $f \in C^2(M)$ , so ist  $D^2f(p)$  symmetrisch. Außerdem ist  $f$  genau dann konvex, wenn  $D^2f(p)$  für alle  $p \in M$  positiv semidefinit ist. Denn  $c_v : \mathbb{R} \rightarrow M$  eine Geodätische mit  $c_v(0) = p$ , so folgt:

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} f \circ c_v(t) = D^2f(p)(v, v).$$

Im Folgenden sei mit  $H$  eine Hadamardmannigfaltigkeit bezeichnet, d.h. eine einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit nicht positiver Krümmung.

**Satz 9.1.4.** Sei  $H$  eine Hadamardmannigfaltigkeit. Ist  $\text{diag} := \{(p, p) \mid p \in X\}$  die Diagonale in  $H \times H$  so ist die Distanzfunktion

$$d : H \times H \setminus \text{diag} \rightarrow \mathbb{R},$$

unendlich oft differenzierbar. Für jedes  $p \in H$  gilt für die Funktion

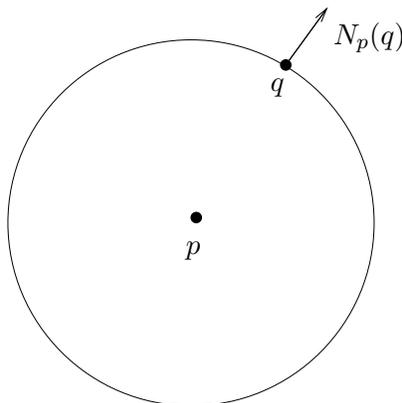
$$d_p : H \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{R}$$

mit  $d_p(q) = d(p, q)$ :

(a)

$$\text{grad } d_p(q) = \dot{c}_{p,q}(d(p, q)) =: N_p(q)$$

wobei  $c_{p,q} : [0, d(p, q)] \rightarrow H$  die eindeutig bestimmte nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische mit  $c_{p,q}(0) = p$  und  $c_{p,q}(d(p, q)) = q$  bezeichnet.



(b) Für alle  $q \in H \setminus \{p\}$  ist  $D^2d_p(q)$  positiv semidefinit und es gilt:

$$D^2d_p(q)(v, v) = \left\langle \frac{D}{dt} J^\perp(d(p, q)), J^\perp(d(p, q)) \right\rangle$$

wobei  $J^\perp$  der orthogonale Anteil des Jacobifeldes  $J$  längs  $c_{p,q}$  ist mit  $J(0) = 0$  und  $J(d(p, q)) = v$ . Ausserdem ist  $d_p : H \rightarrow \mathbb{R}$  konvex.

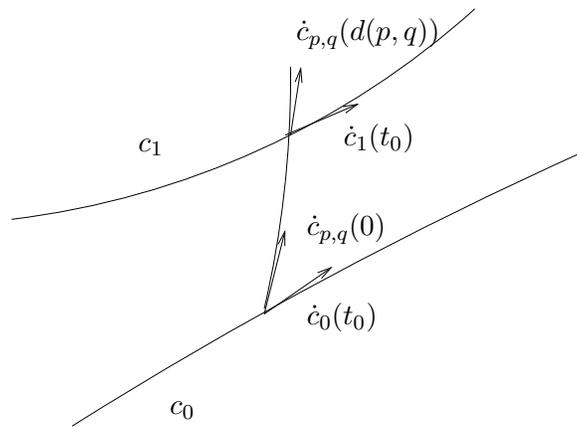
Sind  $c_0, c_1 : \mathbb{R} \rightarrow H$  Geodätische und  $p := c_0(t_0) \neq c_1(t_0) = q$ , so gilt:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} d(c_0(t), c_1(t)) = \langle \dot{c}_{p,q}(d(p, q)), \dot{c}_1(t_0) \rangle - \langle \dot{c}_{p,q}(0), \dot{c}_0(t_0) \rangle,$$

sowie

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=t_0} d(c_0(t), c_1(t)) \geq 0.$$

Insbesondere ist  $t \mapsto d(c_0(t), c_1(t))$  konvex.



**Bemerkung.** Man kann zeigen, dass die Konvexität von  $t \mapsto d(c_0(t), c_1(t))$  äquivalent zur Konvexität von  $d : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  ist, falls auf  $H \times H$  die Produktmetrik gewählt wird. Denn jede Geodätische in  $H \times H$  ist von der Form  $(c_0(t), c_1(t))$ , wobei  $c_0$  und  $c_1$  Geodätische in  $H$  sind.

*Beweis.* Da  $\exp_p : T_p H \rightarrow H$  ein Diffeomorphismus ist und  $d(\exp_p v, p) = \|v\|$ , folgt:

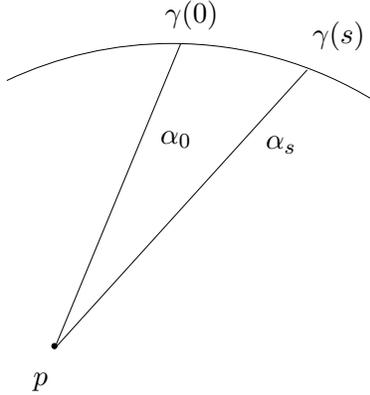
$$d(p, q) = \|\exp_p^{-1} q\|.$$

Daher folgt aus der Differenzierbarkeit von  $(p, q) \rightarrow \exp_p^{-1}(q)$  und der Differenzierbarkeit von  $\|\cdot\| : TH \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  die Differenzierbarkeit von  $d : H \times H \setminus \text{diag} \rightarrow \mathbb{R}$ .

(a) Sei  $\gamma : (-\epsilon, +\epsilon) \rightarrow H$  eine Geodätische mit  $\dot{\gamma}(0) = v \in T_q M$  und  $q \neq p$ . Zu zeigen:

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} d(p, \gamma(s)) = \langle \dot{c}_{p,q}(d(p, q)), \dot{\gamma}(0) \rangle$$

Betrachte die Variation  $\alpha : (-\epsilon, +\epsilon) \times [0, d(p, q)] \rightarrow H$  mit  $\alpha(0, t) = c_{p,q}(t)$  und  $t \rightarrow \alpha(s, t)$  die Geodätische mit  $\alpha(s, 0) = p$  und  $\alpha(s, d(p, q)) = \gamma(s)$ .



Dann ist  $L(\alpha_s) = d(p, \gamma(s))$ . Aus der 1. Variationsformel (Satz 4.3.4) folgt mit

$$J = \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} \alpha_s(t)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} L(\alpha_s) &= \int_0^{d(p,q)} \frac{d}{dt} \langle J(t), \dot{c}_{p,q}(t) \rangle dt \\ &= \langle J(d(p,q)), \dot{c}_{p,q}(d(p,q)) \rangle \\ &= \langle \dot{\gamma}(0), \dot{c}_{p,q}(d(p,q)) \rangle \end{aligned}$$

(b) Aus der 2. Variationsformel (Satz 4.3.7) folgt für

$$J^\perp(t) = J(t) - \langle \dot{c}_{p,q}(t), J(t) \rangle \dot{c}_{p,q}(t) :$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2}{ds^2} \right|_{s=0} L(\alpha_s) &= \int_0^{d(p,q)} \left\langle \frac{D}{dt} J^\perp(t), \frac{D}{dt} J^\perp(t) \right\rangle - \langle R(J^\perp(t), \dot{c}_{p,q}(t)) \dot{c}_{p,q}(t), J^\perp(t) \rangle dt \\ &+ \left\langle \left. \frac{D}{ds} \right|_{s=0} \frac{\partial}{\partial s} \alpha_s(d(p,q)), \dot{c}_{p,q}(d(p,q)) \right\rangle - \left\langle \left. \frac{D}{ds} \right|_{s=0} \frac{\partial}{\partial s} \alpha_s(0), \dot{c}_{p,q}(0) \right\rangle \end{aligned}$$

Da  $\gamma(s) = \alpha_s(d(p,q))$  eine Geodätische und  $\alpha_s(0) = p$  konstant ist, fallen die Randterme weg. Wegen

$$\langle R(J^\perp(t), \dot{c}_{p,q}(t)) \dot{c}_{p,q}(t), J^\perp(t) \rangle = K[J^\perp(t), \dot{c}_{p,q}(t)] \cdot \|J^\perp(t)\|^2 \leq 0,$$

erhalten wir

$$\left. \frac{d^2}{ds^2} \right|_{s=0} L(\alpha_s) = \int_0^{d(p,q)} \left\langle \frac{D}{dt} J^\perp(t), \frac{D}{dt} J^\perp(t) \right\rangle - K[J^\perp(t), \dot{c}_{p,q}(t)] \cdot \|J^\perp(t)\|^2 dt \geq 0.$$

Ausserdem ergibt sich wie in Lemma 7.3.4 durch partielle Integration:

$$\left. \frac{d^2}{ds^2} \right|_{s=0} L(\alpha_s) = \left\langle \frac{D}{dt} J^\perp(t), J^\perp(t) \right\rangle \Big|_0^{d(p,q)} = \left\langle \frac{D}{dt} J^\perp(d(p,q)), J^\perp(d(p,q)) \right\rangle.$$

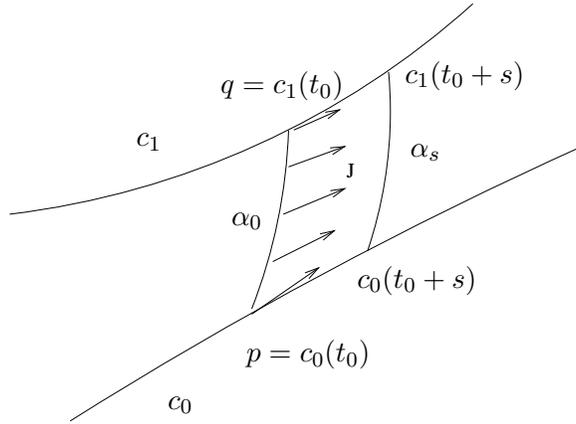
Das Jacobifeld  $J$  ist durch die Randdaten eindeutig bestimmt, denn die Geodätische  $c_{p,q}$  hat keine konjugierten Punkte.

Um den letzten Teil des Satzes zu beweisen betrachte die geodätische Variation

$$\alpha : (-\epsilon, +\epsilon) \times [0, d(p, q)] \rightarrow H$$

mit  $\alpha(0, t) = c_{p,q}(t)$  und  $t \rightarrow \alpha(s, t) = \alpha_s(t)$  Geodätische mit  $\alpha(s, d(p, q)) = c_1(t_0 + s)$  und  $\alpha(s, 0) = c_0(t_0 + s)$ .

Dann folgt wieder aus der 1. Variationsformel für  $J = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \alpha_s(t)$



$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} L(\alpha_s) &= \int_0^{d(p,q)} \frac{d}{dt} \langle J(t), \dot{c}_{p,q}(t) \rangle dt \\ &= \langle J(d(p, q)), \dot{c}_{p,q}(d(p, q)) \rangle - \langle J(0), \dot{c}_{p,q}(0) \rangle \\ &= \langle \dot{c}_{p,q}(d(p, q)), \dot{c}_1(t_0) \rangle - \langle \dot{c}_{p,q}(0), \dot{c}_0(t_0) \rangle \end{aligned}$$

Aus der 2. Variationsformel erhalten wir wie oben für  $J^\perp(t)$ :

$$\frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} L(\alpha_s) = \int_0^{d(p,q)} \left\langle \frac{D}{dt} J^\perp(t), \frac{D}{dt} J^\perp(t) \right\rangle - \langle R(J^\perp(t), \dot{c}_{p,q}(t)) \dot{c}_{p,q}(t), J^\perp(t) \rangle dt \geq 0$$

□

**Lemma 9.1.5.** Sei  $H$  eine Hadamardmannigfaltigkeit und  $f : H \rightarrow \mathbb{R}$  konvex. Dann ist für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$  die Menge

$$A_\alpha = \{x \in H \mid f(x) \leq \alpha\}$$

konvex, d.h. sind  $x, y \in A_\alpha$  und  $c : [0, 1] \rightarrow X$  die Geodätische mit  $c(0) = x$  und  $c(1) = y$ , so gilt für alle  $t \in [0, d(x, y)]$ , dass  $c(t)$  in  $A_\alpha$  liegt.

*Beweis.* Seien  $x, y \in A_\alpha$ , so gilt für  $t \in [0, 1]$ :

$$\begin{aligned} f(c(t)) &\leq f(c(0)) + t(f(c(1)) - f(c(0))) \\ &= f(c(0))(1 - t) + tf(c(1)) \leq \alpha \end{aligned}$$

□

**Korollar 9.1.6.** Für alle  $r > 0$  und  $p \in H$  ist

$$B(p, r) = \{x \mid d(p, x) \leq r\}$$

konvex.

**Korollar 9.1.7.** (Flacher Streifensatz) Sei  $H$  eine Hadamardmannigfaltigkeit und  $c_0 : \mathbb{R} \rightarrow H$  und  $c_1 : \mathbb{R} \rightarrow H$  zwei nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische mit  $c_0(\mathbb{R}) \neq c_1(\mathbb{R})$ . Ist

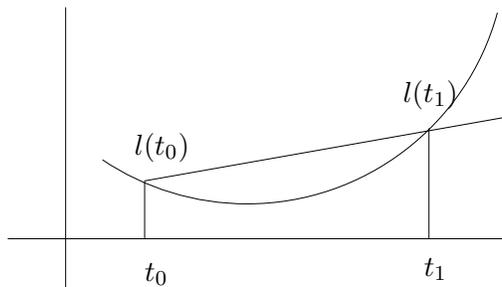
$$\sup\{d(c_0(t), c_1(t)) \mid t \in \mathbb{R}\} < \infty$$

so beranden  $c_0$  und  $c_1$  einen totalgeodätischen flachen Streifen, d.h. eine totalgeodätische Fläche die isometrisch zu einem durch zwei parallele Geraden berandeten Streifens in  $\mathbb{R}^2$  ist.

*Beweis.* Da die Funktion

$$l(t) = d(c_0(t), c_1(t))$$

konvex ist, ist wegen  $\sup\{l(t) \mid t \in \mathbb{R}\} < \infty$  die Funktion  $l(t)$  eine Konstante  $l$ . Denn nicht konstante konvexe Funktionen sind unbeschränkt (siehe Bild). Da  $c_0$  und  $c_1$  verschieden sind ist  $l$  positiv. Aus Satz 9.1.4 folgt: Sind  $c_0, c_1 : \mathbb{R} \rightarrow H$  Geodätische und  $p := c_0(t_0) \neq c_1(t_0) = q$ ,



so gilt:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} l(t) &= \langle \dot{c}_{p,q}(d(p, q)), \dot{c}_1(t_0) \rangle - \langle \dot{c}_{p,q}(0), \dot{c}_0(t_0) \rangle \\ &= \cos \angle(\dot{c}_{p,q}(d(p, q)), \dot{c}_1(t_0)) - \cos \angle(\dot{c}_{p,q}(0), \dot{c}_0(t_0)) \end{aligned}$$

Somit erhalten wir:

$$\pi - \beta_1(t_0) := \angle(\dot{c}_{p,q}(d(p, q)), \dot{c}_1(t_0)) = \angle(\dot{c}_{p,q}(0), \dot{c}_0(t_0)) =: \beta_0(t_0)$$

Ist  $t_0 < t_1$  so folgt somit für die Innenwinkel des geodätischen Vierecks  $c_0(t_0), c_1(t_0), c_1(t_1), c_0(t_1)$ :

$$\beta_0(t_0) + \beta_1(t_0) = \pi$$

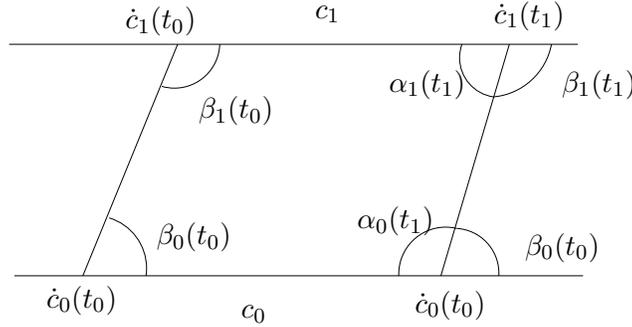
und

$$\alpha_1(t_1) + \alpha_0(t_1) = 2\pi - \beta_1(t_1) - \beta_0(t_1) = \pi.$$

Somit gilt:

$$\beta_0(t_0) + \beta_1(t_0) + \alpha_1(t_1) + \alpha_0(t_1) = 2\pi.$$

Wegen Korollar 8.3.4 beranden die Seiten des Vierecks ein flaches totalgeodätisches Flächenstück. Da die Aussage für alle  $t_0 < t_1$  gilt, folgt die Behauptung.  $\square$



## 9.2 Fundamentalgruppe von kompakten Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung

Nun wollen wir uns mit der Fundamentalgruppe von kompakten Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung beschäftigen.

Für solche Mannigfaltigkeiten bestimmt die Fundamentalgruppe ihren topologischen Typ, d.h. zwei Mannigfaltigkeiten mit isomorphen Fundamentalgruppen sind homöomorph (Farrell, Jones (1989))

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, daß jede Abelsche Untergruppe unendlich zyklisch ist, d.h. sie ist isomorph zu  $\mathbb{Z}$ .

Zunächst wollen wir uns mit allgemeinen kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeiten  $(M, g)$  beschäftigen. Mit  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  bezeichnen wir ihre universelle Überlagerung mit der gelifteten Metrik  $\tilde{g}$ , mit  $\Gamma$  bezeichnen wir die Gruppe der Decktransformationen. Diese ist isomorph zu  $\pi_1(M)$ .

**Satz 9.2.1.** *Sei  $(M, g)$  eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $M = \tilde{M}/\Gamma$ . Dann existiert für jedes  $\gamma \in \Gamma$  eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische  $\tilde{c} : \mathbb{R} \rightarrow \tilde{M}$  und  $l > 0$  mit*

$$\gamma\tilde{c}(t) = \tilde{c}(t + l).$$

Die Geodätische  $\tilde{c}$  heißt Achse von  $\gamma$ .

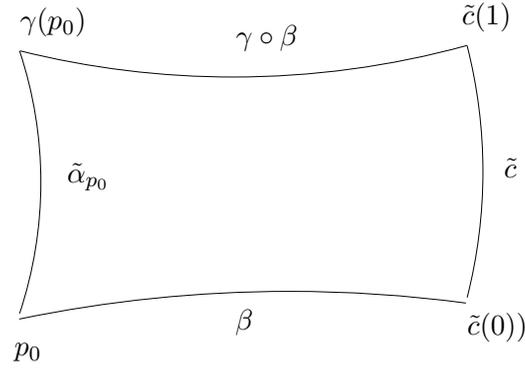
**Bemerkung.** (a) Ist  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$  die Überlagerungsabbildung, so ist  $c(t) := \pi \circ \tilde{c}(t)$  eine geschlossene Geodätische mit  $c(t) = c(t + l)$ , denn

$$c(t + l) = \pi\tilde{c}(t + l) = \pi\tilde{c}(t) = c(t).$$

Sei  $\pi(p_0) = x_0$  und  $D : \pi_1(M, x_0) \rightarrow \Gamma$  der Gruppenisomorphismus mit  $D[\alpha](p_0) = \tilde{\alpha}_{p_0}(1)$  (siehe Abschnitt 5.3). Ist  $D[\alpha] = \gamma$ , so ist  $c$  frei homotop zu  $\alpha$ .

Wähle eine Kurve  $\beta : [0, 1] \rightarrow \tilde{M}$  mit  $\beta(0) = p_0$  und  $\beta(1) = \tilde{c}(0)$ . Dann ist  $\gamma \circ \beta : [0, 1] \rightarrow \tilde{M}$  eine Kurve mit  $\gamma \circ \beta(0) = \gamma(p_0)$  und  $\gamma \circ \beta(1) = \tilde{c}(l)$ . Da  $\tilde{M}$  einfach zusammenhängend ist, existiert eine Homotopie  $\tilde{H} : [0, 1] \times [0, l] \rightarrow \tilde{M}$  mit  $(s, t) \rightarrow \tilde{H}_s(t)$  und  $\tilde{H}_s(0) = \beta(s)$ ,  $\tilde{H}_s(1) = \gamma\beta(s)$ ,  $\tilde{H}_0(t) = \tilde{\alpha}_{p_0}(t)$ ,  $\tilde{H}_1(t) = \tilde{c}(t)$ .

Dann definiert  $H_s(t) = \pi \circ \tilde{H}_s(t)$  eine freie Homotopie mit  $H_0 = \alpha$ ,  $H_1 = c$ . Seien  $F(M)$



die freien Homotopieklassen in  $M$ . Man kann zeigen, dass die freien Homotopieklassen in 1 – 1 Beziehung zu den Konjugationsklassen in  $\pi_1(M)$  stehen.

Für den Beweis des Satzes benötigen wir folgende Lemmata:

**Lemma 9.2.2.** *Sei  $\text{diam } M = r_0$  und  $\tilde{p} \in \tilde{M}$ . Dann gilt:*

$$\pi(B(\tilde{p}, r_0)) = M.$$

*Beweis.* Sei  $p = \pi(\tilde{p})$  und  $x \in M$ . Dann existiert eine minimale Geodätische  $c : [0, r] \rightarrow M$  mit  $r = d(x, p) < r_0$  und  $c(0) = p, c(r) = x$ .

Sei  $\tilde{c} : [0, r] \rightarrow \tilde{M}$  Lift von  $c$  mit  $\tilde{c}(0) = \tilde{p}$ . Dann folgt:  $d(\tilde{p}, \tilde{c}(r)) \leq L(\tilde{c}) = r \leq r_0$ . Also ist  $\pi(B(\tilde{p}, r_0)) = M$ .  $\square$

**Lemma 9.2.3.** *Sei  $\gamma \in \Gamma$ ,  $\gamma \neq \text{id}$  und  $l = \inf\{d(q, \gamma q) \mid q \in \tilde{M}\}$ . Dann ist  $l \geq 2 \text{inj}(M)$  und es existiert ein  $q_0 \in \tilde{M}$  mit*

$$d(q_0, \gamma q_0) = l.$$

*Beweis.* Ist  $\tilde{c} : [0, r] \rightarrow \tilde{M}$  eine minimale nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische mit  $\tilde{c}(0) = q$  und  $\tilde{c}(r) = \gamma(q)$ , so ist  $\pi\tilde{c} = c$  eine geodätische Schleife der Länge  $r$ . Folglich ist  $\frac{1}{2}r \geq \text{inj}_{\pi(q)}(M) \geq \text{inj}(M)$ , also  $\frac{1}{2}l \geq \text{inj}(M)$ .

Sei nun  $p_n \in \tilde{M}$  eine Folge mit  $d(p_n, \gamma p_n) \rightarrow l$ . Sei  $p \in \tilde{M}$  und  $r_0 = \text{diam } M$ , so existiert eine Folge  $\tau_n \in \Gamma$  mit  $q_n := \tau_n p_n \in B(p, r_0)$ . Dann folgt:

$$d(p_n, \gamma p_n) = d(\tau_n^{-1} q_n, \gamma \tau_n^{-1} q_n) = d(q_n, \tau_n \gamma \tau_n^{-1} q_n) \rightarrow l.$$

Setze  $\gamma_n = \tau_n \gamma \tau_n^{-1}$ . Nach Übergang zu einer Teilfolge können wir annehmen:  $q_n \rightarrow q$ . Wir erhalten

$$\begin{aligned} d(q, \gamma_n q) &\leq d(q, q_n) + d(q_n, \gamma q_n) + d(\gamma_n q_n, \gamma_n q) \\ &= 2d(q, q_n) + d(q_n, \gamma q_n). \end{aligned}$$

Also existiert ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so daß  $d(q, \gamma_n(q)) \leq l + 1$  für alle  $n \geq n_0$ .

Nach nochmaligem Übergang zu einer Teilfolge können wir die Konvergenz  $\gamma_n q \rightarrow q_1$  annehmen. Folglich existiert ein  $m \in \mathbb{N}$  mit  $d(\gamma_n q, \gamma_m q) < \frac{1}{2} \text{inj}(M)$  mit  $n \geq m$ . Aus obigen

## 9.2. FUNDAMENTALGRUPPE VON KOMPAKTEN MANNIGFALTIGKEITEN NEGATIVER KRÜMMUNG

Argumenten folgt für  $n \geq m$  :  $\gamma_n = \gamma_m$  und daher  $d(q, \gamma_n q) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(q, \gamma_n q) = l$ . Also erhalten wir aus der Definition von  $\gamma_m$ :

$$l = d(q, \tau_m \gamma \tau_m^{-1} q) = d(\tau_m^{-1} q, \gamma \tau_m^{-1} q)$$

und das Lemma folgt mit  $q_0 = \tau_m^{-1} q$ .  $\square$

**Lemma 9.2.4.** Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $f : M \rightarrow M$  eine Isometrie mit

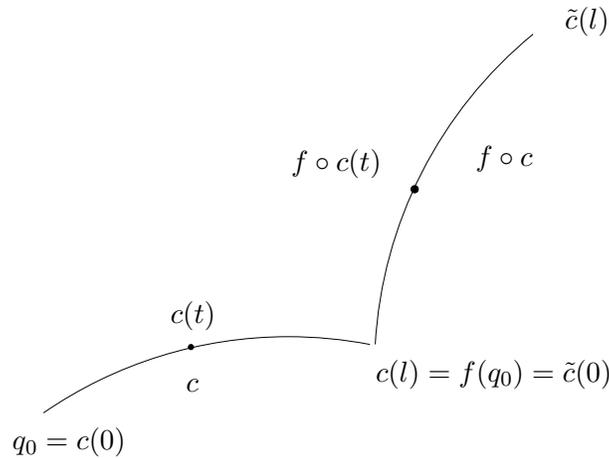
$$d(q_0, f(q_0)) = \inf\{d(q, f(q)) \mid q \in M\} = l > 0.$$

Sei  $c : \mathbb{R} \rightarrow M$  eine minimale Geodätische mit  $c(0) = q_0$  und  $c(l) = f(q_0)$ . Dann gilt:

$$f(c(t)) = c(t + l) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

*Beweis.* Betrachte die Geodätische  $\tilde{c} = f \circ c$ . Es gilt:

$$\tilde{c}(0) = f(q_0) \text{ und } \tilde{c}(l) = f^2(q_0)$$



Ist  $\dot{\tilde{c}}(0) \neq \dot{c}(l)$ , so folgt für  $t \in (0, l_0)$

$$\begin{aligned} d(c(t), f(c(t))) &< d(c(t), f(q_0)) + d(f(q_0), f(c(t))) \\ &= l - t + t = l. \end{aligned}$$

Dies steht aber im Widerspruch zur Definition von  $q_0$ .  $\square$

**Satz 9.2.5.** (Preissmann)

Sei  $M$  eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit strikt negativer Krümmung. Dann ist jede nichttriviale abelsche Untergruppe  $A \subset \pi_1(M)$  unendlich zyklisch, d.h. isomorph zu  $\mathbb{Z}$ .

**Lemma 9.2.6.** Sei  $H$  eine Hadamardmannigfaltigkeit und  $f : H \rightarrow H$  eine Isometrie mit einer Achse  $c$ , d.h.  $c$  ist eine Geodätische mit  $f \circ c(t) = c(t + l)$  für ein  $l > 0$ . Dann hat  $f$  keine Fixpunkte und ist  $c_1$  eine weitere Geodätische invariant unter  $f$ , d.h.  $c_1(\mathbb{R}) = f c_1(\mathbb{R})$ , so beranden  $c$  und  $c_1$  einen flachen Streifen.

*Beweis.* Wäre  $p$  ein Fixpunkt von  $f$ , so würde folgen:

$$d(p, c(nl)) = d(f^n(p), f^n(c(0))) = d(p, c(0)).$$

Auf der anderen Seite folgt aus der Konvexität von  $t \rightarrow d(p, c(t))$ :

$$d(p, c(t)) \rightarrow \infty$$

falls  $t \rightarrow \pm\infty$  und daher kann  $p$  kein Fixpunkt sein. Ist nun  $c_1$  eine weitere Geodätische invariant unter  $f$  und ist  $f \circ c_1(0) = c_1(\tilde{l})$ , so folgt, da  $f$  eine fixpunktfreie Isometrie ist:

$$f \circ c_1(t) = c_1(t + \tilde{l})$$

Zeichnung! für alle  $t \in \mathbb{R}$ .  
Dann gilt  $l = \tilde{l}$  denn

$$d(c(nl), c_1(n\tilde{l})) = d(c(0), c_1(0))$$

und

$$nl = d(c(0), c(nl)) \leq d(c(0), c_1(0)) + n\tilde{l} + d(c(nl), c_1(n\tilde{l}))$$

Damit erhalten wir

$$l \leq \frac{2d(d(0), c_1(0))}{n} + \tilde{l}$$

und somit folgt für  $n \rightarrow \infty$ :  $l \leq \tilde{l}$ . Mit gleichen Argumenten folgt:  $\tilde{l} \leq l$ . Betrachte nun  $0 \leq s \leq l$ , so folgt

$$d(c_1(s + nl), c(s + nl)) = d(c_1(s), c(s)) \leq \rho$$

für eine Konstante  $\rho$ . Die Behauptung erhält man aus dem flachen Streifensatz.  $\square$

**Korollar 9.2.7.** *Sei  $H$  eine Hadamardmannigfaltigkeit mit  $K < 0$  und  $f : H \rightarrow H$  Isometrie. Dann besitzt  $f$  höchstens eine invariante Geodätische  $c$  mit  $f \circ c(t) = c(t + l)$  mit  $l > 0$ , d.h.  $f$  besitzt höchstens eine Achse.*

**Korollar 9.2.8.** *Sei  $H$  Hadamardmannigfaltigkeit mit  $K < 0$  und  $f : H \rightarrow H$  Isometrie mit Achse  $c$ . Sei  $\tilde{f}$  eine fixpunktfreie Isometrie, die mit  $f$  kommutiert. Dann ist  $c$  auch Achse von  $\tilde{f}$ , denn  $\tilde{f}$  operiert als Isometrie fixpunktfrei.*

*Beweis.* Es gilt:

$$f(\tilde{f}c(\mathbb{R})) = \tilde{f}(fc(\mathbb{R})) = \tilde{f}(c(\mathbb{R}))$$

und somit ist  $\tilde{f}c$  eine Achse von  $f$ . Da aber  $f$  die Geodätische  $c$  schon als Achse besitzt, folgt wegen der Eindeutigkeit:

$$\tilde{f}(c(\mathbb{R})) = c(\mathbb{R}).$$

und damit ist  $c$  auch Achse von  $\tilde{f}$ .  $\square$

**Lemma 9.2.9.** *Sei  $M = \tilde{M}/\Gamma$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit nicht positiver Krümmung (nicht notwendigerweise Kompakt), wobei  $\tilde{M}$  die universelle Überlagerung darstellt. Sei  $c : \mathbb{R} \rightarrow \tilde{M}$  eine Geodätische und  $A$  eine Untergruppe von  $\Gamma$  mit  $\gamma(c(\mathbb{R})) = c(\mathbb{R})$  für alle  $\gamma \in A$ . Dann ist  $A$  isomorph zu  $\mathbb{Z}$ .*

## 9.2. FUNDAMENTALGRUPPE VON KOMPAKTEN MANNIGFALTIGKEITEN NEGATIVER KRÜMMUNG

*Beweis.* Da  $\Gamma$  fixpunktfrei operiert, folgt aus der Definition von  $A$ , dass für jedes  $\gamma \in A$  ein  $\theta(\gamma) \in \mathbb{R}$  existiert mit  $\gamma c(t) = c(t + \theta(\gamma))$ . Dann ist

$$\theta : A \rightarrow (\mathbb{R}, +)$$

ein Gruppenhomomorphismus, denn

$$c(\theta(\gamma_1 \circ \gamma_2)) = \gamma_1 \circ \gamma_2 c(0) = \gamma_1 c(\theta(\gamma_2)) = c(\theta(\gamma_1) + \theta(\gamma_2)).$$

Da  $\tilde{M}$  eine Hadamardmannigfaltigkeit ist, ist  $c : \mathbb{R} \rightarrow \tilde{M}$  injektiv und es folgt:

$$\theta(\gamma_1 \circ \gamma_2) = \theta(\gamma_1) + \theta(\gamma_2).$$

Außerdem ist  $\ker \theta = \text{id}$ , denn aus  $\theta(\gamma) = 0$  folgt  $\theta(c(0)) = c(0)$  und somit  $\gamma = \text{id}$ . Also ist  $\theta$  injektiv. Da die Gruppe  $\Gamma$  diskret operiert, existiert eine Konstante  $b > 0$  mit

$$|\theta(\gamma)| \geq b$$

für alle  $\gamma \in A$  mit  $\gamma \neq \text{id}$ . Damit erhalten wir aber  $G := \theta(A) \cong \mathbb{Z}$ , denn  $G$  ist eine Untergruppe von  $\mathbb{R}$  mit

$$a = \inf\{|g| \mid g \in G \setminus \{0\}\} > 0$$

Daher ist  $G$  diskret in  $\mathbb{R}$  und somit ist  $a \in G$  sowie  $G \supset \{na \mid n \in \mathbb{Z}\}$ .

Ist nun  $b \in G$  beliebig, so existiert ein  $n \in \mathbb{Z}$  mit  $|b - na| < a$  und da  $b - na \in G$ , folgt aus der Definition von  $a$ :  $b - na = 0$ .  $\square$

*Beweis des Satzes von Preissmann*

Wegen der Kompaktheit von  $M$ , besitzt wegen des Satzes 9.2.1 jedes Element in  $\Gamma$  eine Achse. Sei  $A \subset \Gamma$  eine abelsche Untergruppe so besitzt  $A$  wegen Korollar 9.2.8 eine gemeinsame Achse. Wegen Lemma 9.2.9 ist  $A$  unendlich zyklisch.  $\square$

**Satz 9.2.10.** *Sei  $M$  kompakte Mannigfaltigkeit mit  $K < 0$ . Dann ist  $\pi_1(M)$  ist nicht abelsch.*

**Bemerkung.** Da  $\pi_1(M)$  wegen des Theorem's von Preissmann unendlich zyklisch sein muß, folgt der Satz aus folgendem Lemma.

**Lemma 9.2.11.** *Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit mit  $K \leq 0$  und  $\pi_1(M)$  unendlich zyklisch. Dann ist  $M$  nicht kompakt.*

*Beweis.* Nehmen wir an  $M$  wäre kompakt und sei  $M = \tilde{M}/\Gamma$ , mit  $\Gamma = \{\gamma^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ . Sei  $c : \mathbb{R} \rightarrow \tilde{M}$  eine Achse von  $\gamma$  und  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \tilde{M}$  eine Geodätische mit  $\beta(0) = c(0), \dot{\beta}(0) \perp \dot{c}(0)$ .

Sei  $h_t : [0, r] \rightarrow M$  minimale Geodätische mit  $h_t(0) = \pi c(0), h_t(r) = \pi \beta(t)$ .

Wir zeigen:  $L(h_t) \geq t$ :

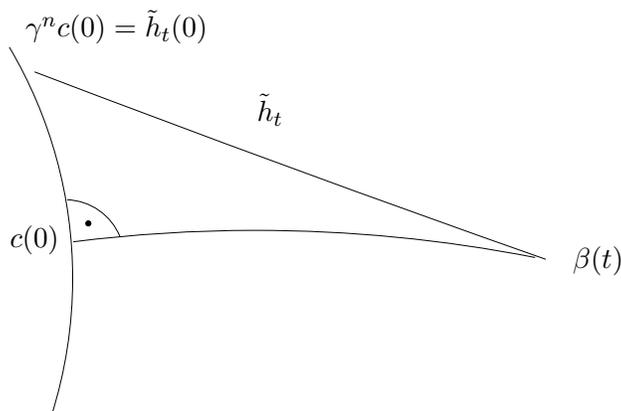
Sei  $\tilde{h}_t$  der eindeutig bestimmte Lift von  $h_t$  mit  $\tilde{h}_t(r) = \beta(t)$  Dann folgt:

$$\tilde{h}_t(0) \in \pi^{-1}(c(0))$$

und somit existiert ein  $n \in \mathbb{Z}$  mit

$$\tilde{h}_t(0) = \gamma^n c(0)$$

Dann erhalten wir:



$$L(h_t) = L(\tilde{h}_t) \geq d(\beta(t), \gamma^n c(0)) \geq \sqrt{t^2 + d(c(0), \gamma^n c(0))} \geq t$$

Die letzte Abschätzung ist dabei eine Konsequenz aus dem Kosinussatz. Da  $t$  beliebig, ist  $\text{diam } M = \infty$  im Widerspruch zur Kompaktheit von  $M$ .

□

Das Theorem von Preissmann läßt sich auflösbare Gruppen erweitern:

**Definition 9.2.12.** Sei  $G$  eine Gruppe, so betrachte die Folge von Normalteilern

$$G \triangleright G_1 := [G, G] \triangleright G_2 := [G_1, G_1] \triangleright \dots \triangleright G_i = [G_{i-1}, G_{i-1}]$$

Dann heißt  $G$  auflösbar, falls ein  $m > 0$  existiert mit  $G_m = 0$ .

**Bemerkung.** Ist  $G$  eine Gruppe so ist die Kommutatorgruppe  $[G, G]$  die kleinste Untergruppe von  $G$  die von der Menge

$$\{\gamma\eta\gamma^{-1}\eta^{-1} \mid \gamma, \eta \in G\}$$

der Kommutatoren in  $G$  erzeugt wird. Diese Gruppe ist invariant unter den inneren Automorphismen (sogar unter allen Automorphismen von  $G$ ) und somit ist  $[G, G]$  ein Normalteiler in  $G$ . Die Kommutatorgruppe ist genau dann trivial, falls  $G$  abelsch ist. Die Faktorgruppe

$$G/[G, G]$$

ist immer abelsch, denn aus

$$\gamma\eta = \eta\gamma(\gamma^{-1}\eta^{-1}\gamma\eta)$$

folgt

$$[\gamma][\eta] = [\gamma\eta] = [\eta\gamma] = [\eta][\gamma]$$

Ist  $G = \pi_1(M)$  die Fundamentalgruppe einer Mannigfaltigkeit  $M$ , so ist  $G/[G, G]$  isomorph zur ersten Homologiegruppe  $H_1(M)$  von  $M$ .

**Satz 9.2.13.** (Byers)

Sei  $M$  kompakt,  $K < 0$ ,  $A$  eine auflösbare Untergruppe von  $\pi_1(M)$ . Dann ist  $A \cong \mathbb{Z}$ . Insbesondere ist  $\pi_1(M)$  nicht auflösbar.

## 9.2. FUNDAMENTALGRUPPE VON KOMPAKTEN MANNIGFALTIGKEITEN NEGATIVER KRÜMMUNG

*Beweis.* Sei

$$A = A_0 \triangleright A_1 \triangleright A_2 \triangleright \dots \triangleright A_{m-1} \triangleright A_m = \{\text{id}\}$$

mit  $A_i = [A_{i-1}, A_{i-1}]$ , so ist, wie oben bemerkt,  $A_{i-1}/A_i$  abelsch. Insbesondere ist  $A_{m-1}$  abelsch.

Wegen des Satzes von Preissmann existiert ein  $\gamma \in \Gamma \in \pi_1(M)$  mit  $\{\gamma^n\}_{n \in \mathbb{Z}} = A_{m-1}$

Sei  $c : \mathbb{R} \rightarrow \tilde{M}$  Achse von  $\gamma$ .

Sei  $\beta \in A_{m-2}$ , so folgt  $\beta^{-1}\gamma\beta = \gamma^k$  für ein  $k \in \mathbb{Z}$ , denn  $A_{m-1}$  ist Normalteiler in  $A_{m-2}$ .

Da  $c$  auch invariant unter  $\gamma^k$  ist, ist  $\beta c$  auch Achse von  $\gamma$  und wegen der Eindeutigkeit folgt:  $c(\mathbb{R}) = \beta c(\mathbb{R})$ . Somit ist nach Lemma 9.2.9  $\beta = \gamma^l$  für ein  $l \in \mathbb{Z}$ . Also ist  $A_{m-2}$  unendlich zyklisch und  $A_{m-1} = \{\text{id}\}$ . Der Beweis, dass  $A = A_0$  unendlich zyklisch ist, folgt damit durch Induktion.  $\square$



# Kapitel 10

## Der Sphärensatz

### 10.1 Der Injektivitätsradius

**Definition 10.1.1.** Sei  $(M, g)$  eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $p \in M$ . Sei  $C(p)$  der Schnittort von  $p$ . Dann heißt

$$\text{inj}_p(M) = d(p, C(p)) = \inf\{d(p, q) \mid q \in C(p)\}$$

der Injektivitätsradius von  $M$  in  $p$ . Falls  $C(p) = \emptyset$ , so setze  $\text{inj}_p(M) := \infty$ . Wir nennen

$$\text{inj}(M) := \inf\{\text{inj}_p(M) \mid p \in M\}$$

den Injektivitätsradius von  $M$ .

**Bemerkung.** Ist  $\rho : S_p M \rightarrow [0, \infty]$  die Schnittortfunktion, so ist

$$C(p) = \exp_p\{\rho(v) \cdot v \mid v \in S_p M, \rho(v) < \infty\}$$

und es folgt (Übung)

$$\text{inj}_p(M) = \inf\{\rho(v) \mid v \in S_p M\}.$$

Ist  $C(p) \neq \emptyset$ , so existiert wegen der Stetigkeit von  $\rho$  ein  $S_p M$  mit  $\rho(v) = \text{inj}_p(M)$ . Außerdem realisiert die Geodätische  $c_v : [0, \rho(v)] \rightarrow M$  den Abstand zwischen  $p$  und  $C(p)$ , d.h.  $L(c_v) = \rho(v) = d(p, C(p))$ .

**Definition 10.1.2.** Definiere für  $v \in S_p M$

$$\tau(v) = \sup\{t > 0 \mid c_v : [0, t] \rightarrow M \text{ hat keine konjugierten Punkte}\}$$

Dann heißt

$$\text{conj}_p(M) := \inf\{\tau(v) \mid v \in S_p M\}$$

der Konjugationsradius von  $M$  in  $p$ . Ist  $v \in S_p M$ , so heißt  $c_v : [0, l] \rightarrow M$  geodätische Schleife durch  $p$ , falls der Endpunkt von  $c_v$  mit dem Anfangspunkt  $p$  übereinstimmt, d.h.  $c_v(l) = p$ . Die Geodätische  $c_v : [0, l] \rightarrow M$  heißt geschlossen, falls  $\dot{c}_v(l) = \dot{c}_v(0)$ .

Mit

$$l(p) = \inf\{l \mid v \in S_p M, c_v : [0, l] \rightarrow M \text{ geodätische Schleife}\}$$

bezeichne die Länge der kürzesten geodätischen Schleife.

**Bemerkung.** Wegen des Jacobi-Kriteriums Satz 7.3.2 ist  $\rho(v) \leq \tau(v)$  und daher ist  $\text{inj}_p(M) \leq \text{conj}_p(M)$ . Außerdem ist  $\text{inj}_p(M) \leq l(p)/2$ . Denn ist  $l(p) < \infty$ , so existiert ein  $v \in S_p M$  und eine Geodätische Schleife  $c_v : [0, l(p)] \rightarrow M$ . Daher ist  $\text{inj}_p(M) \leq \rho(v) \leq l(p)/2$ . Also gilt:  $\text{inj}_p(M) \leq \min\{\text{conj}_p(M), l(p)/2\}$ . Wir zeigen nun, daß Gleichheit gilt. Dazu beweisen wir zunächst das folgende Lemma.

**Lemma 10.1.3.** *Sei  $\text{inj}_p(M) < \infty$  und  $\text{inj}_p(M) < \text{conj}_p(M)$ . Ist  $v \in S_p M$  mit  $\rho(v) = \text{inj}_p(M)$  so existiert genau ein  $w \in S_p M, v \neq w$  mit*

$$c_v(\text{inj}_p(M)) = c_w(\text{inj}_p(M)).$$

Außerdem gilt:

$$c_v(t + \text{inj}_p(M)) = c_w(-t + \text{inj}_p(M)).$$

Insbesondere ist  $c_v : [0, 2 \text{inj}_p(M)] \rightarrow M$  eine geodätische Schleife.

*Beweis.* Sei  $v \in S_p M$  mit  $a = \rho(v) = \text{inj}_p(M)$ . Insbesondere hat die Geodätische  $c_v : [0, a] \rightarrow M$  keine konjugierten Punkte. Daher existiert wegen Lemma 7.3.1 ein  $w \in S_p M, w \neq v$ , mit  $c_w(a) = c_v(a) = q$ . Wir zeigen nun: Ist  $w \in S_p M, w \neq v$  ein beliebiger Vektor mit dieser Eigenschaft so gilt

$$c_v(a + t) = c_w(a - t)$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Insbesondere ist dann  $c_v : [0, 2a] \rightarrow M$  eine Geodätische Schleife der Länge  $l = 2a = 2 \text{inj}_p(M)$  sowie  $\dot{c}_v(2a) = -w$  und somit ist  $w$  eindeutig durch  $v$  bestimmt.

Zeichnung!!!

Es genügt zu zeigen: Ist  $X \in T_q M$  mit  $X \perp \dot{c}_v(a)$ , so ist  $\dot{c}_w(a) \perp X$ . Denn dann ist  $\dot{c}_v(a) = -\dot{c}_w(a)$ , denn  $\dot{c}_v(a) = \dot{c}_w(a)$  würde  $v = w$  implizieren.

Den Beweis der Behauptung erhält man wie folgt: Da  $c_v : [0, a] \rightarrow M$  keine konjugierten Punkte besitzt, existiert ein  $\xi \in T_p M$  mit  $D \exp_p(av)\xi = X$ . Wegen des Gausslemmas ist  $\xi \perp av$ . Sei  $\alpha : (-\epsilon, +\epsilon) \rightarrow S_p M$  eine Kurve mit  $\alpha(0) = v, \dot{\alpha}(0) = \frac{1}{a}\xi$ . Betrachte

$$\varphi(s) = \exp_p a\alpha(s) = c_{\alpha(s)}(a)$$

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \varphi(s) = D \exp_p(av)\xi = X$$

Da  $\rho(\alpha(s)) \geq \text{inj}_p(M) = a$  ist  $c_{\alpha(s)} : [0, a] \rightarrow M$  minimal. Da  $c_w : [0, a] \rightarrow M$  ebenfalls keine konjugierten Punkte besitzt, existiert eine Kurve  $\beta : (-\epsilon, +\epsilon) \rightarrow S_p M$  mit  $\beta(0) = w$  und eine Funktion  $h : (-\epsilon, +\epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $h(0) = a$  und  $\varphi(s) = \exp_p h(s)\beta(s) = c_{\beta(s)}(h(s))$ . Außerdem gilt

$$h(s) \geq d(p, \varphi(s)) = a$$

und daher ist  $h'(0) = 0$ . Folglich erhalten wir dann aus dem Gausslemma:

$$X = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \varphi(s) = D \exp_p(aw)(a\beta'(0)) \perp \dot{c}_w(a)$$

denn  $\beta'(0)$  ist senkrecht zu  $w$ . □

**Korollar 10.1.4.** *Sei  $M$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann gilt für alle  $p \in M$ :*

$$\text{inj}_p(M) = \min\{\text{conj}_p(M), l(p)/2\}.$$

*Beweis.* Es bleibt zu zeigen:  $\text{inj}_p(M) \geq \min\{\text{conj}_p(M), l(p)/2\}$ .

Wir können  $\text{inj}_p(M) < \infty$  sowie  $\text{conj}_p(M) > \text{inj}_p(M)$  annehmen. Ist einer dieser beiden Fälle nicht erfüllt, so gilt die Ungleichung trivialerweise. Dann existiert wegen Lemma 10.1.3 ein  $v \in S_p M$ , so dass  $c_v : [0, 2\text{inj}_p(M)] \rightarrow M$  eine geodätische Schleife ist. Aus der Definition von  $l(p)$  folgt  $2\text{inj}_p(M) \geq l(p)$  und somit ist die obige Ungleichung bewiesen.  $\square$

**Korollar 10.1.5.** *Sei  $(M, g)$  eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann gilt mindestens eine der beiden Aussagen:*

(a)  $\text{inj}(M) = \text{conj}(M)$

(b) *Es existiert eine nach der Bogenlänge parametrisierte geschlossene Geodätische*

$$c : [0, 2a] \rightarrow M \text{ mit } a = \text{inj}(M).$$

*Außerdem existiert keine geschlossene Geodätische mit kleinerer Länge.*

**Bemerkung.** Der Fall (b) tritt also immer für kompakte Mannigfaltigkeiten ohne konjugierte Punkte, wie z.B. Mannigfaltigkeiten nicht positiver Krümmung ein.

*Beweis.* Ist  $\text{inj}(M) \neq \text{conj}(M)$  so folgt  $\text{inj}(M) < \text{conj}(M)$ , denn  $\text{inj}(M) \leq \text{conj}(M)$ . Da  $M$  kompakt ist, ist die Schnittortfunktion  $\rho : SM \rightarrow [0, \infty]$  beschränkt. Da  $\text{inj}(M) = \inf\{\rho(w) \mid w \in SM\}$ , existiert wegen der Stetigkeit von  $\rho$  ein  $v \in S_p M$  mit  $a = \rho(v) = \text{inj}(M) = \text{inj}_p(M)$ . Nach Voraussetzung ist  $\text{inj}_p(M) < \text{conj}_p(M)$  und wegen Lemma 10.1.3 ist  $c_v : [0, 2a] \rightarrow M$  somit eine geodätische Schleife. Betrachte  $v_1 = \dot{c}_v(a)$ . Dann ist  $\rho(v_1) = \text{inj}(M)$  und wegen Lemma 10.1.3 gilt  $\dot{c}_{v_1}(a) = \dot{c}_{-v_1}(a)$ . Somit ist  $\dot{c}_v(2a) = v$  und daher ist  $c_v$  eine geschlossene Geodätische. Außerdem kann es keine geschlossene Geodätische mit Länge  $l_0 < 2a$  geben, denn sonst wäre  $a > l_0/2 \geq \text{inj}(M)$ .  $\square$

**Korollar 10.1.6.** *Sei  $M$  eine kompakte Mannigfaltigkeit und  $K_{\max}$  die maximale Schnittkrümmung von  $M$ . Ist  $K_{\max} \leq 0$ , so existiert eine geschlossene Geodätische  $c$  minimaler Länge, so daß*

$$\text{inj}(M) = \frac{1}{2}l(c)$$

*Ist  $K_{\max} > 0$ , so ist*

$$\text{inj}(M) \geq \frac{\pi}{\sqrt{K_{\max}}}$$

*oder es existiert eine geschlossene Geodätische  $c$  minimaler Länge mit*

$$\text{inj}(M) = \frac{l(c)}{2}$$

*Beweis.* Ist  $K_{\max} \leq 0$ , so ist  $\text{conj}(M) = \infty$  und die Aussage folgt unmittelbar aus Korollar 10.1.5. Ist  $K_{\max} > 0$ , so folgt  $\text{conj}(M) \geq \frac{\pi}{\sqrt{K_{\max}}}$  aus dem Vergleichssatz 8.1.2 von Rauch. Wieder folgt die Aussage aus Korollar 10.1.5.  $\square$

## 10.2 Der Injektivitätsradius von Mannigfaltigkeiten positiver Krümmung

**Satz 10.2.1.** *Sei  $M$  einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit strikt positiver Krümmung, d.h. es existiert ein  $\delta > 0$  mit  $\delta \leq K \leq K_{\max}$ . Ist die Dimension von  $M$  gerade, so gilt:*

$$\text{inj}(M) = \text{conj}(M) \geq \frac{\pi}{\sqrt{K_{\max}}}$$

*Beweis.* Zu zeigen bleibt:  $\text{inj}(M) = \text{conj}(M)$ . Aus  $K \geq \delta \geq 0$  folgt aus dem Satz von Bonnet-Myers die Kompaktheit von  $M^{2n}$ . Wäre  $\text{inj}(M) < \text{conj}(M)$ , so würde wegen Korollar eine geschlossene Geodätische  $c : [0, l] \rightarrow M$  existieren mit  $l = L(c) = 2 \text{inj}(M)$ .

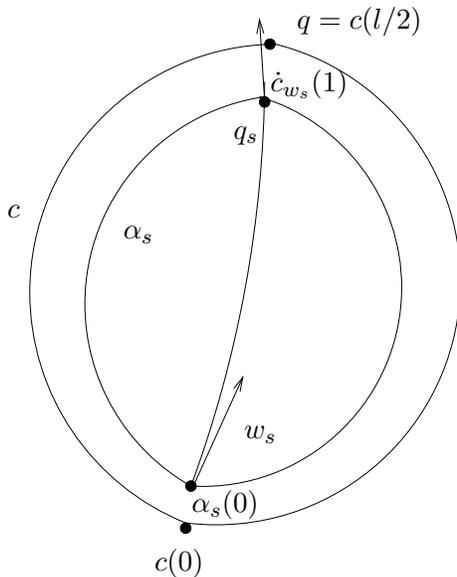
Wir wollen dies zum Widerspruch führen. Der erste Teil der Argumentation läuft wie im Beweis des Satzes von Synge. Sei  $P_{0,l} : T_{c(0)}M \rightarrow T_{c(l)}M$  die Parallelverschiebung längs  $c$  und  $E = \dot{c}(0)^\perp$  der Orthogonalraum zu  $\dot{c}(0)$  in  $T_{c(0)}M$ . Dann ist  $P_{0,l} : E \rightarrow E$  eine bezüglich des Skalarproduktes auf  $E$  orthogonale Abbildung. Da  $M$  als einfachzusammenhängende Mannigfaltigkeit orientierbar ist, ist  $P_{0,l}$  orientierungserhaltend und  $\det P_{0,l} = 1$ . Da  $E$  ungerade Dimension besitzt, existiert ein Eigenvektor und somit ein periodisches paralleles Vektorfeld  $X$ , mit  $\|X(t)\| = 1$  längs  $c$ . Ist  $\alpha_s(t) = \exp_{c(t)} sX(t)$  die zu  $X$  gehörige Variation, so gilt für  $L(s) = L(\alpha_s)$ :

$$L''(0) = - \int_0^l K[\dot{c}(t), X] dt < 0$$

und somit existiert ein  $\epsilon > 0$  mit

$$L(\alpha_s) < L(c) = 2 \text{inj}(M)$$

für alle  $s \neq 0$  mit  $|s| < \epsilon$ .



Sei  $q_s$  ein Punkt auf  $\alpha_s$  mit maximalem Abstand von  $\alpha_s(0)$ . Da  $c(l/2)$  der eindeutig bestimmte Punkt auf  $c$  mit größtem Abstand zu  $c(0)$  ist, folgt  $\lim_{s \rightarrow 0} q_s = c(l/2) = q$ .

Betrachte nun ein festes  $s \neq 0$  mit  $|s| < \epsilon$  und  $q_s = \alpha_s(t_0)$ . Natürlich hängt  $t_0 = t_0(s)$  von  $s$  ab. Da  $L(\alpha_s) < 2 \operatorname{inj}(M)$  ist  $d(\alpha_s(0), \alpha_s(t)) < \operatorname{inj}(M)$  für alle  $t \in [0, l]$ .

Daher existiert genau eine Kurve  $\beta_s : [0, l] \rightarrow T_{\alpha_s(0)}M$  mit  $\exp_{\alpha_s(0)} \beta_s(t) = \alpha_s(t)$ . Betrachte nun den Vektor  $w_s = \beta_s(t_0)$  und die Geodätische  $c_{w_s}(u) = \exp_{\alpha_s(0)}(uw_s)$ . Wir zeigen nun, dass  $c_{w_s}(u)$  die Kurve  $\alpha_s$  in  $q_s = c_{w_s}(1) = \alpha_s(t_0)$  senkrecht schneidet. Nach Definition von  $q_s = \alpha_s(t_0)$  folgt:

$$d^2(\exp_{\alpha_s(0)} \beta_s(t), \alpha_s(0)) = \|\beta_s(t)\|^2 \leq \|\beta_s(t_0)\|^2.$$

Somit hat  $\|\beta_s(t)\|$  ein Maximum an der Stelle  $t = t_0$  und es gilt:  $\langle \beta'_s(t_0), w_s \rangle = 0$ .

Dann erhalten wir aus dem Gausslemma:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle D \exp_{\alpha_s(0)}(\beta_s(t_0)) \beta'_s(t_0), D \exp_{\alpha_s(0)}(\beta_s(t_0)) w_s \rangle = \left\langle \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} \exp_{\alpha_s(0)} \beta_s(t), \dot{c}_{w_s}(1) \right\rangle \\ &= \langle \dot{\alpha}_s(t_0), \dot{c}_{w_s}(1) \rangle \end{aligned}$$

Betrachte nun eine Folge  $s_j \rightarrow 0$ , so dass die Folge  $w_{s_j}$  gegen einen Vektor  $w$  konvergiert (dies ist wegen der Kompaktheit von  $SM$  möglich). Dann ist  $w \in T_{c(0)}M$  und  $\|w\| = d(c(0), q) = \operatorname{inj}(M)$  sowie

$$\langle \dot{c}(l/2), \dot{c}_w(1) \rangle = 0$$

und somit  $c_w : [0, 1] \rightarrow M$  eine dritte Geodätische, der Länge  $\operatorname{inj}_M$  die  $c(0)$  mit  $c(l/2)$  verbindet. Dies steht aber im Widerspruch zu Lemma 10.1.3.  $\square$

**Bemerkung.** In dieser Allgemeinheit ist Satz 10.2.1 falsch für ungeradedimensionale Mannigfaltigkeit strikt positiver Krümmung und ungerader Dimension. Es gibt Metriken auf  $S^{2k+1}$ ,  $k \geq 1$ , mit positiver Krümmung und  $\operatorname{inj}(M) < \operatorname{conj}(M)$ . Diese Beispiele wurden zuerst von Berger angegeben (Berger-Sphären)

Jedoch gilt der folgende Satz:

**Satz 10.2.2.** (Klingenberg 1961)

Sei  $M$  eine einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit positiver Krümmung mit minimaler Schnittkrümmung  $K_{\min}$  und maximaler Schnittkrümmung  $K_{\max}$ . Ist die Pinchingkonstante

$$\delta = \frac{K_{\min}}{K_{\max}} > \frac{1}{4},$$

so gilt:

$$\operatorname{inj}(M) = \operatorname{conj}(M) \geq \frac{\pi}{\sqrt{K_{\max}}}.$$

**Bemerkung.** Man zeigt, daß unter dieser Voraussetzung keine geschlossene Geodätische der Länge kleiner als  $2 \operatorname{conj}(M)$  existiert. Der Beweis benutzt die Morsetheorie (siehe z.B. das Buch von do Carmo). Abresch und Meyer haben diesen Satz sogar für  $\delta \geq \frac{1}{4} - \epsilon$  bewiesen. Dabei ist  $\epsilon$  von der Größenordnung  $10^{-6}$ . Das Optimale  $\epsilon$  ist unbekannt.

### 10.3 Der Beweis des Sphärensatzes

**Satz 10.3.1.** (Berger, Klingenberg)

Sei  $M^n$  eine  $n$ -dimensionale einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit positiver Krümmung mit Pinchingkonstante

$$\delta = \frac{K_{\min}}{K_{\max}} > \frac{1}{4}.$$

Dann ist  $M$  homöomorph zur Sphäre  $S^n$ .

**Bemerkungen.** (a) Ist  $\dim M = 2$ , so ist jede einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit strikt positiver Krümmung homöomorph (sogar diffeomorph) zu  $S^2$ . Denn jede kompakte einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit ist diffeomorph zu  $S^2$ .

(b) Ist  $\dim M$  gerade, so sind die Eigenschaften einfach zusammenhängend und orientierbar äquivalent. Dies ist eine Konsequenz des Satzes von Synge.

(c) Für  $\delta = \frac{1}{4}$  ist der Satz falsch. Ein Gegenbeispiel liefert der  $\mathbb{C}P^n$ , der die Pinchingkonstante  $\frac{1}{4}$  besitzt, einfach zusammenhängend ist, jedoch nicht homöomorph zu  $S^{2n}$  ist (gewisse Homologiegruppen sind verschieden). Insofern ist der Sphärensatz optimal.

(d) Es ist ein offenes Problem, ob  $M$  unter den angegebenen Voraussetzungen diffeomorph zu Sphäre  $S^n$  ist. Es gibt z.B. 7-dimensionale Mannigfaltigkeiten, die homöomorph aber nicht diffeomorph zu  $S^2$  sind (exotische Sphären). Auf diesen Mannigfaltigkeiten ist aber bisher nicht einmal eine Metrik mit strikt positiver Krümmung gefunden worden. Es gilt aber: ist  $\delta \geq 0,68$ , so ist  $M$  diffeomorph zu  $S^n$ . Jedoch ist  $\delta$  mit ziemlicher Sicherheit nicht optimal.

**Lemma 10.3.2.** (Berger) Sei  $M$  eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit und seien  $p, q \in M$  mit

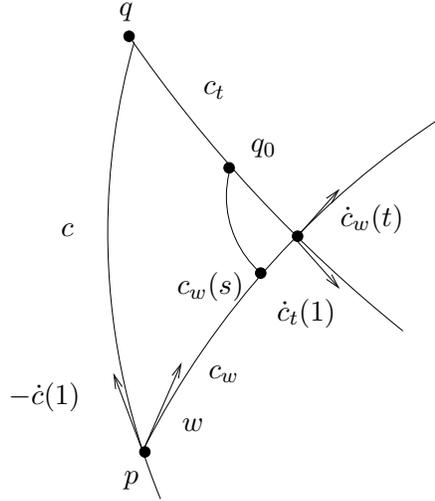
$$d(p, q) = \text{diam } M.$$

Dann existiert zu jedem  $w \in T_p M$  eine minimale Geodätische  $c : [0, 1] \rightarrow M$  mit  $c(0) = q, c(1) = p$  und  $\langle -\dot{c}(1), w \rangle \geq 0$ , d.h.  $\angle_p(-\dot{c}(1), w) \leq \pi/2$ .

*Beweis.* Betrachte die Geodätische  $c_w(t) = \exp_p tw$  und es sei  $c_t : [0, 1] \rightarrow M$  eine minimale Geodätische mit  $c_t(0) = q$  und  $c_t(1) = c_w(t)$ . Es genügt zu zeigen: für jedes  $n \in \mathbb{N}$  existiert ein  $0 \leq t_n \leq 1/n$  mit  $\langle -\dot{c}_{t_n}(1), \dot{c}_w(t_n) \rangle \geq 0$ . Dann können wir eine Teilfolge von  $t_n$  wählen mit  $-\dot{c}_{t_{n_k}}(1) \rightarrow v$  und die Geodätischen  $c_{t_{n_k}} : [0, 1] \rightarrow M$  konvergieren gegen eine minimale Geodätische  $c : [0, 1] \rightarrow M$  mit  $c(0) = q, c(1) = p$  und  $-\dot{c}(1) = v$ . Insbesondere ist  $\langle -\dot{c}(1), w \rangle \geq 0$ .

Wir behaupten nun, daß eine solche Folge  $t_n$  existieren muß. Denn würde sie nicht existieren, so gäbe es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\langle \dot{c}_t(1), \dot{c}_w(t) \rangle > 0$  für alle  $0 \leq t \leq \frac{1}{n}$ .

Wir zeigen, daß daraus folgt: Die Funktion  $t \rightarrow d(q, c_w(t))$  ist auf  $[0, 1/n]$  streng monoton steigend. Dies steht aber im Widerspruch zur Definition von  $p = c_w(0)$  als Punkt maximalen Abstandes von  $q$ . Der Beweis wird dadurch etwas technischer, weil wir nicht wissen, daß  $t \rightarrow d(q, c_w(t))$  differenzierbar ist.



Wähle ein  $t \in [0, \frac{1}{n}]$ . Wir zeigen: Es existiert ein  $\epsilon > 0$  mit  $d(q, c_w(s)) < d(q, c_w(t))$  für  $s \in (t - \epsilon, t)$ .

Wähle  $q_0$  auf  $c_t$ , so daß  $d(q_0, c_w(t)) < \text{inj}(M)$ . Für  $|s - t|$  genügend klein ist dann die Kurve  $v(s) \in T_{q_0}M$  durch  $c_w(s) = \exp_{q_0} v(s)$  eindeutig definiert und differenzierbar. Dann gilt:

$$f(s) = d^2(q_0, c_w(s)) = \|v(s)\|^2$$

und

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} f'(t) &= \langle v'(t), v(t) \rangle = \langle D \exp_{q_0}(v(t))(v'(t)), D \exp_p(v(t))(v(t)) \rangle \\ &= \left\langle \frac{d}{ds} \Big|_{s=t} \exp_{q_0} v(s), \dot{c}_{v(t)}(1) \right\rangle = \langle \dot{c}_w(t), \dot{c}_{v(t)}(1) \rangle = \frac{1}{\lambda} \langle \dot{c}_w(t), \dot{c}_t(1) \rangle > 0 \end{aligned}$$

wobei  $\lambda > 0$  so gewählt ist, daß  $\lambda \dot{c}_{v(t)}(1) = \dot{c}_t(1)$ .

Dann existiert ein  $\epsilon > 0$  mit  $d(q_0, c_w(s)) < d(q_0, c_w(t))$  für alle  $s \in [t - \epsilon, t)$ . Damit folgt:

$$d(q, c_w(s)) \leq d(q, q_0) + d(q_0, c_w(s)) < d(q, q_0) + d(q_0, c_w(t)) = d(q, c_w(t))$$

□

Der Sphärensatz wird im wesentlichen eine Konsequenz des folgenden Lemmas sein.

**Lemma 10.3.3.** Sei  $(M, g)$  eine einfach zusammenhängende  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit deren Schnittkrümmung  $K$  der Ungleichung

$$\frac{1}{4} < \delta < K \leq 1$$

für eine Konstante  $\delta$  genügt. Dann ist für jedes  $0 < r \leq \pi$  und  $x \in M$  der offene geodätische Ball  $B(x, r)$  von Radius  $r$  um  $x$  homöomorph zum offenen Ball von Radius  $r$  im  $\mathbb{R}^n$ . Ist darüberhinaus  $r \in (\frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}, \pi)$  und  $p, q \in M$  so gewählt, dass  $d(p, q) = \text{diam}(M)$ , so folgt:

$$M = B(p, r) \cup B(q, r)$$

*Beweis.* Der erste Teil des Lemmas folgt da  $\text{inj}(M) \geq \pi$ . Ist die Dimension von  $M$  gerade, so erhalten wir dies aus Satz 10.2.1 auch schon unter der Voraussetzung  $0 < \delta < K \leq 1$ . Im allgemeinen Fall folgt dies aus Satz 10.2.2, falls  $1/4 < \delta \leq K \leq 1$ .

Um den zweiten Teil zu beweisen, nehmen wir an es gäbe ein  $x \in M$  mit  $r \leq d(q, x) \leq d(p, x)$ . Wir wollen dies zum Widerspruch führen.

Zunächst zeigen wir, dass aus dieser Annahme die Existenz eines  $p_0$  folgt, mit

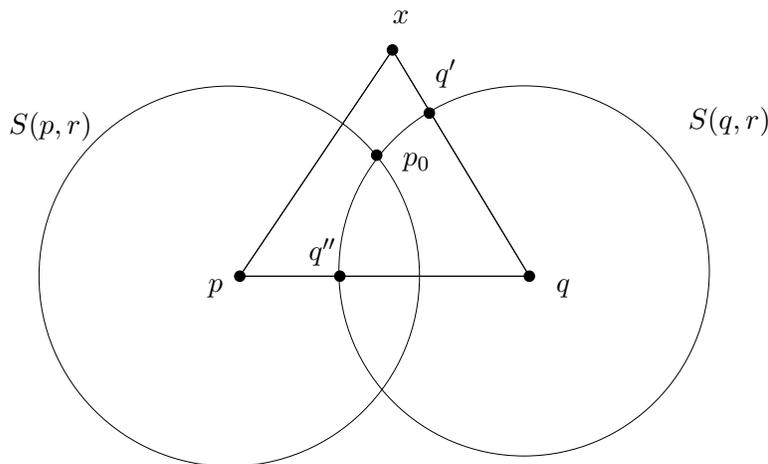
$$p_0 \in S(q, r) \cap S(p, r).$$

Betrachte eine minimale Geodätische die  $q$  mit  $x$  verbindet. Sei  $q'$  der Schnittpunkt dieser Geodätischen mit  $S(q, r)$ . Dann ist  $q' \notin B(p, r)$ , denn

$$d(q', p) \geq d(p, x) - d(x, q') \geq d(q, x) - d(x, q') = r.$$

Wegen des Satzes von Bonnet-Myers folgt aus der Definition von  $r$ :

$$\text{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}} < 2r$$



Betrachte nun eine minimale Geodätische die  $q$  mit  $p$  verbindet und einen Schnittpunkt  $q''$  dieser Geodätischen mit  $S(q, r)$  (beachte, dass  $\text{diam}(M) \geq \text{inj}(M) \geq \pi > r$ . Dann ist  $q'' \in B(p, r)$ , denn

$$d(p, q'') = d(p, q) - d(q, q'') < 2r - r = r$$

Da  $S(q, r)$  zusammenhängend ist, existiert der gesuchte Punkt  $p_0 \in S(q, r)$  mit  $d(p_0, p) = r$ . Somit ist

$$p_0 \in S(q, r) \cap S(p, r)$$

Den gewünschten Widerspruch werden wir nun aus der Existenz von  $p_0$  herleiten.

Betrachte zunächst die minimale Geodätische  $\gamma$  die  $p$  mit  $p_0$  verbindet. Wegen des Lemmas 10.3.2 von Berger existiert eine minimale Geodätische  $c$  die  $p$  mit  $q$  verbindet, so dass

$$\langle \dot{c}(0), \dot{\gamma}(0) \rangle \geq 0.$$

Sei  $p_1$  ein Schnittpunkt von  $S(p, r)$  mit  $c$ . Vergleiche nun  $M$  mit der Sphäre  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  von Radius  $1/\sqrt{\delta}$ . Diese Sphäre hat dann konstante Krümmung  $\delta$ . Da  $K > \delta$  und da  $\pi < \pi/\sqrt{\delta} = \text{inj}(S^n)$  sowie  $\pi \leq \text{inj}(M)$ , ist wegen Korollar 8.2.2 für alle  $x \in M$ ,  $\tilde{x} \in S^n$  und jede lineare Isometrie  $I : T_{\tilde{x}}S^n \rightarrow T_xM$  die Abbildung

$$\varphi : B(\tilde{x}, \pi) \rightarrow B(x, \pi)$$

mit  $\varphi = \exp_x \circ I \circ \exp_{\tilde{x}}^{-1}$  ein distanzverkürzender Diffeomorphismus. Ist  $x = p$  so ist  $p_0, p_1 \in B(p, \pi)$ , denn  $r < \pi$ . Da  $\angle(\dot{c}(0), \dot{\gamma}(0)) \leq \pi/2$  erhalten wir:

$$d(p_0, p_1) \leq d(\varphi^{-1}(p_0), \varphi^{-1}(p_1)) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}} < r$$

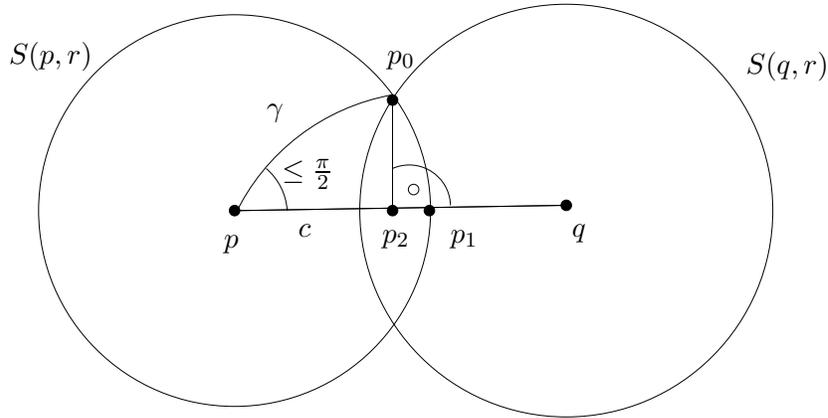
Wegen  $d(p_0, p) = d(p_0, q) = r$  existiert ein weiterer Punkt  $p_2$  im inneren des geodätischen Segment  $c$  mit

$$d(p_0, p_2) = \min[d(p_0, c(t)) \mid t \in I] \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}.$$

Insbesondere schneidet die minimierende Geodätische die  $p_0$  mit  $p_2$  verbindet die Geodätische  $c$  senkrecht. Da  $d(p, q) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$  ist entweder  $d(p, p_2) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}$  oder  $d(q, p_2) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}$ . Ist  $d(p, p_2) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}$  sind für  $p_2 = x$  die Punkte  $\varphi^{-1}(p_0), \varphi^{-1}(p)$  in der oberen Hemisphäre  $B(\tilde{x}, \pi/2\sqrt{\delta})$  von  $S^n$ . Da  $\angle_{\tilde{x}}(\varphi^{-1}(p_0), \varphi^{-1}(p)) = \pi/2$  folgt

$$d(p, p_0) \leq d(\varphi^{-1}(p), \varphi^{-1}(p_0)) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}} < r$$

im Widerspruch zu  $p_0 \in S(p, r)$ .

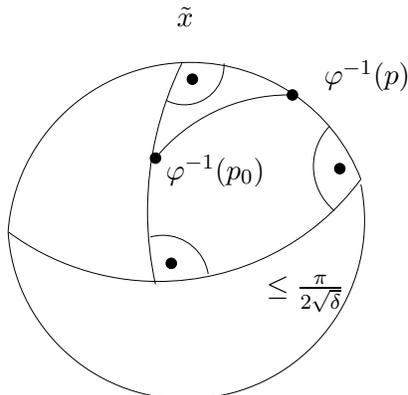


Im anderen Fall erhalten wir mit dem gleichen Argument:

$$d(q, p_0) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}} < r,$$

im Widerspruch zu  $p_0 \in S(q, r)$ .

□



*Beweis des Sphärensatzes*

Ist  $g$  eine Metrik auf  $M$  mit

$$\delta = \frac{K_{\min}}{K_{\max}} > \frac{1}{4}.$$

kann man zum einen durch Reskalieren der Metrik (d.h. durch Multiplikation von  $g$  mit einer positiven Konstanten) erreichen, dass  $K_{\max} = 1$  ist und somit  $K_{\min} > 1/4$  ist (durch Reskalieren ändert sich  $\delta$  nicht). Der Sphärensatz folgt dann aus der Tatsache, dass eine einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit, die sich als Vereinigung zweier Bälle schreiben lässt, homöomorph zu einer Sphäre ist. Alternativ kann der Homöomorphismus auch explizit konstruiert werden (siehe z.B. das Buch von Do Carmo) - Übung.

# Index

- Jacobi-Kriterium , 153
- Abstand, 55
- Atlas, 5
  - orientierter, 108
- Bahn, 43
- Blatt, 115
- Christoffelsymbole, 60
- Decktransformationsgruppe, 124
- Derivation, 25
- Differential, 15
- differenzierbare Abbildung, 11
- diskrete Gruppe
  - seeGruppe, 45
- diskreter Raum, 45
- Dreiecksvergleichssätze,
  - seeVergleichssätze168
- Durchmesser, 90
- dynamisches System, 29, 75
- Einbettung, 19
  - isometrische, 70, 71
- Einheitstangentialebündel, 76
- Einsteinmannigfaltigkeit,
  - siehe Mannigfaltigkeit
- Energie, 53
- Exponentialabbildung, 76
- Faser, 115
- Fluß, 29
  - geodätischer, 75
  - globaler, 30
  - lokaler, 28
- Fundamentalgruppe, *siehe* Gruppe
- Geodätische, 73
- geodätische Fluß, *siehe* Fluß
- Geometrie
  - Euklidische, 132
  - hyperbolische, 132
    - Halbraummodell, 133
    - Ballmodell (Poincaré-Modell), 133
    - Hyperboloidmodell, 133
  - sphärische, 132
- glatte Abbildung, 12
- Gramscher Determinantensatz, 145
- Gruppe
  - diskrete, 45
  - Fundamentalgruppe, 121
  - Holonomiegruppe, 65
  - Liegruppe, 44
- Gruppenaktion, *siehe* Gruppenoperation
- Gruppenoperation, 42, 44
  - effektive, 42
  - eigentlich diskontinuierliche, 45
  - eigentliche, 45
  - fixpunktfreie, 45
  - freie, 45
  - isometrische, 44, 45
  - transitive, 43
- Gruppenwirkung, *siehe* Gruppenoperation
- Hausdorffraum, 5
- Hochhebung, *siehe* Lift
- Holonomiegruppe, *siehe* Gruppe
- homotop, 121
- Homotopie, 120, 121
  - mit festen Endpunkten, 121
- Horizontalraum, 50
- Immersion, 19
  - isometrische Immersion, 38
- Indexform, 154
- Integralkurve, 26
- Isometrie, 39
- Isometriegruppe, 39
- Isometrie

- lokale Isometrie, 39
- Jacobifeld, 110
  - Minimaleigenschaften, 162
- Jacobigleichung, 110
- Jacobiidentität, 33
- Jacobimatrix, 16
- Jacobioperator, 110
- kanonische Projektion, 21, 43
- Karte, 5
  - verträgliche Karte, 6
- Kodimension, 7
- konjugierter Punkt, 113
  - Multiplizität, 113
- Koordinatendarstellung, 11
- kovariante Ableitung, 57
  - längs einer Kurve, 62
- Krümmung
  - RicciKrümmung, 96
  - Schnittkrümmung, 95
  - Skalarkrümmung, 97
- Krümmungstensor, 59
  - Riemannscher, 93
- Kurve
  - differenzierbare, 53
- Länge, 53
- Lebesgue-Integral, 147
- Lemma
  - Slice-Lemma, 51
  - von Schur, 98
- Levi-Civita-Zusammenhang,
  - siehe* Zusammenhang
- Lieableitung, 34
- Liealgebra, 33
- Liegruppe, *siehe* Gruppe
- Lieklammer, 32
- Liesches Klammerprodukt, *siehe* Lieklammer
- Lift, 119
  - Eindeutigkeit, 120
- lokale Parametrisierung, 5
- Lorentzmetrik, *siehe* Metrik, *siehe* Metrik
- Mannigfaltigkeit
  - $C^k$ -Mannigfaltigkeit, 6
  - einfach zusammenhängende, *siehe* zusammenhängend
  - Einsteinmannigfaltigkeit, 97
  - Hadamardmannigfaltigkeit, 131
  - isometrische Mannigfaltigkeiten, 39
  - orientierbare, 108
  - Riemannsche, 37
    - geodätisch vollständige, 75
  - topologische Mannigfaltigkeit, 5
  - zusammenhängende, 54
- Metrik
  - konform äquivalente, 39
  - Lorentzmetrik, 37, 45
  - Produktmetrik, 42
  - pullback metric, 38
  - Riemannsche, 37
    - zurückgeholte Metrik, 38
  - mit festen Endpunkten, 121
- Nullraum , 160
- Operation, *siehe* Gruppenoperation
  - einfach transitive, 125
- Orbit, 43
- Orientierung, 108
- Orientierungsüberlagerung,
  - siehe* Überlagerung
- orientierungserhaltende Abbildung, 108
- orthogonale Gruppe, 44
- Parallelverschiebung, 64
- Pol, 131
- Produktregel, 25
- Quotientenabbildung, 9, 47
- Quotiententopologie, 43, 47, 117
- Rauch, *siehe* Vergleichssätze
- Raumform, 132
- regulärer Wert, 21
- RicciTensor, *siehe* Tensor
- Riemannsche
  - Mannigfaltigkeit,
    - siehe* Mannigfaltigkeit
  - Metrik, *siehe* Metrik
- Riemannscher Krümmungstensor,
  - siehe* Krümmungstensor
- Riemannscher Zusammenhang,
  - siehe* Zusammenhang
- Satz

- von Bonnet-Myers, 106
  - Verallgemeinerung, 128
- von Hadamard-Cartan, 130
- von Hopf-Rinow
  - Teil 1, 87
  - Teil 2, 89
- von Levi-Civita, 68
- von Picard-Lindelöf, 27
- von Synge, 108
- Schnittkrümmung, *siehe* Krümmung
- Schnittort, 157
  - tangentiale, 157
- Schnittortfunktion, 152
- Skalarkrümmung, *siehe* Krümmung
- Slice-Lemma, *siehe* Lemma
- $C^k$ -Struktur, 6
- Submersion, 21
  - Riemannsche, 50
- Tangentialbündel, 21
  - parallelisierbares Tangentialbündel, 26
  - triviales Tangentialbündel, 26
- Tangentialraum, 13
- Tangentialvektor, 13
- Tensor, 58
  - Charakterisierung, 59
  - kontravariant, 58
  - kovariant, 58
  - Krümmungs~,
    - siehe* Krümmungstensor
  - Ricci-Tensor, 96
- Tensorfeld, *siehe* Tensor
- topologischer Raum, 5
- Torsion, 58
- Trajektorie, 26
- Überlagerung, 115
  - galoische, 125
  - Orientierungsüberlagerung, 109
  - universelle, 123, 127
    - Eindeutigkeit, 124
- Untermannigfaltigkeit, 7
- Variation
  - differenzierbare, 98
  - geodätische, 110
  - mit festen Endpunkten, 98
  - stückweise differenzierbare, 99
- Variationsformeln
  - 1.te, 100
  - 2.te, 103
- Variationsvektorfeld, 99
- Vektorfeld, 24
  - Charakterisierung, 30
  - Jacobifeld, *siehe* Jacobifeld
  - längs einer Kurve, 61
    - paralleles, 63
  - paralleles, 63
- Vergleichssätze
  - lokale Vergleichssätze, 166
  - Rauchscher Vergleichssatz, 164
  - Dreiecksvergleichssätze, 168
- Vertikalraum, 50
- Zerlegung der 1, 147
- zusammenhängend, *siehe* Mannigfaltigkeit
  - einfach, 109, 122
  - lokal wegweise, 115
  - semilokal einfach, 127
- Zusammenhang, 57
  - Levi-Civita-Zusammenhang, 68
    - lokale Darstellung, 70
  - Riemannscher, 66
  - symmetrisch, 58
  - torsionsfrei, 58