Absolut stetiges Spektrum von (zufälligen) Schrödinger–Operatoren

Wolfgang Spitzer
Universität Erlangen–Nürnberg
Institut für Theoretische Physik

mit Richard Froese und David Hasler

Oggebbio, August 24–28, 2009

Übersicht[a]

[a] Haftungsverweigerung: Es wird hier keine Haftung für nicht zitierte Arbeiten übernommen. Mangel an Zitaten sind dem Platzangebot und nicht deren (Un)Wertschätzung zuzuschreiben.

1 Einleitung

Wir betrachten Schrödinger–Operatoren auf Graphen. Ein *Graph* (V, E) besteht hier aus einer abzählbar unendlichen Menge V, die *Vertexmenge* heißt. $E \subseteq V \times V$ heißt *Kantenmenge* (edges) und soll

(i) mit $(v, w) \in E$ ist auch $(w, v) \in E$,

(ii) *Koordinatenzahl* $C_v := |\{w \in V : (v, w) \in E\}| \le C < \infty$ uniform in $v \in V$

erfüllen. Man nennt $v, w \in V$ *nächste Nachbarn*, falls $(v, w) \in E$.
Beispiele:
(i) *Regulärer d–dimensionaler Graph* $\mathbb{Z}^d$ (bzw. $\mathbb{N}_0^d$), $d \in \mathbb{N}$:
Vertexmenge $V = \mathbb{Z}^d = \{x = (x_1, \ldots, x_d) : x_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \ldots, d\}$ (bzw. $V = \mathbb{N}_0^d$) mit Kantenmenge
$E = \{(x, y) \in V \times V : \|x - y\|_1 := \sum_{i=1}^d |x_i - y_i| = 1\}$.

(ii) *Regulärer Baum* T_k mit Koordinatenzahl $k + 1, k \in \mathbb{N}$. T_k hat k Vorwärtsnachbarn und 1 Rückwärtsnachbar.

Der Graph (V, E) induziert eine *Adjazenzmatrix* $\Delta : \ell^2(V) \to \ell^2(V)$ mit Matrixelementen $\Delta(v, w)$ gegeben durch

$$\Delta(v, w) := \begin{cases} 1 & \text{falls } (v, w) \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

D.h., für $\phi \in \ell^2(V), v \in V$,

$$(\Delta\phi)(v) := \sum_{w \in V} \Delta(v, w)\phi(w) = \sum_{w \in V:(v,w) \in E} \phi(w) . \qquad (1)$$

Aufgrund der obigen Forderungen (i) und (ii) an den Graphen ist Δ ein beschränkter, selbstadjungierter Operator bzgl. des üblichen Skalarproduktes $\langle \phi, \psi \rangle := \sum_{v \in V} \bar{\phi}(v)\psi(v)$ für $\phi, \psi \in \ell^2(V)$.

In Beispiel (i) und $d = 1$ ist

$$\Delta = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & 1 & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Die *kinetische Energie* eines quantenmechanischen Teilchens auf dem Graphen (V, E) wird hier durch den Laplace–Operator $-\Delta$ beschrieben (eigentlich $-\Delta + \mathrm{diag}(C_v) \geq 0$).

Die *potentielle Energie* wird beschrieben durch eine Funktion $q : V \to \mathbb{R}$. q wird identifiziert mit dem Multiplikations–Operator $M_q : \ell^2(V) \to \ell^2(V)$,

$$(M_q\phi)(v) := q(v)\phi(v)\,, \quad \phi \in \ell^2(V)\,, v \in V\,. \tag{2}$$

q soll hier immer *beschränkt* sein. Also ist M_q ein beschränkter, selbstadjungierter Operator auf $\ell^2(V)$.

Die *Gesamtenergie* eines quantenmechanischen Teilchens auf dem Graphen (V, E) wird beschrieben durch den *Schrödinger–Operator*

$$H := -\Delta + a \cdot q\,. \tag{3}$$

$a \in \mathbb{R}$ ist dabei eine sogenannte *Kopplungskonstante*. H ist also ein beschränkter, selbstadjungierter Operator auf $\ell^2(V)$.

$\lambda \in \mathbb{C}$ ist in der *Resolventenmenge* von H, falls die sogenannte *Resolvente* $G_\lambda := (H - \lambda)^{-1}$ ein beschränkter Operator auf $\ell^2(V)$ ist. Das Komplement, $\sigma(H)$, der Resolventenmenge (in $\mathbb{C}$) heißt das *Spektrum* von H. Da H selbstadjungiert ist, ist $\sigma(H)$ eine (abgeschlossene) beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$.

Es gibt eine Familie orthogonaler Projektoren $\{P_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ auf $\ell^2(V)$ sodaß

$$H = \int_{\mathbb{R}} t\, dP_t$$

mit $P_t := P_{(-\infty,t]} = 1_{(-\infty,t]}(H)$; 1_B ist Indikatorfunktion von B.

Dies ist im Sinne des Lebesgue–Stieltjes–Integrals

$$\langle \phi, H\psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} t\, d\langle \phi, P_t\psi \rangle$$

für $\phi, \psi \in \ell^2(V)$ zu verstehen. Mittels $\mu_{\phi,\psi}(B) := \langle \phi, P_B\psi \rangle$ ist hiermit ein (komplexes) Borel–Maß auf $\mathbb{R}$ definiert.

Sei λ in der *oberen Halbebene* $\mathbb{H} := \{x + \mathrm{i}y : x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}$ (allgemein, λ in der Resolventenmenge). Dann heißt der Kern der Resolvente von H $(v, w \in V, 1_v := 1_{\{v\}}, \mu_{v,w} := \mu_{1_v,1_w})$

$$G_\lambda(v, w) = (H - \lambda)^{-1}(v, w) = \langle 1_v, (H - \lambda)^{-1}1_w \rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_{v,w}(t)}{t - \lambda} \tag{4}$$

die *Green–Funktion*. $G_\lambda(\cdot, w)$ ist die eindeutige Funktion $\phi \in \ell^2(V)$ mit

$$(H - \lambda)\phi = 1_w\,. \tag{5}$$

Wir Lebesgue–zerlegen das W–Maß $\mu_v := \mu_{v,v}$ und schreiben

$$\mu_v = \mu_{as,v} \oplus \mu_{s,v}\,. \tag{6}$$

$\lambda \in \sigma(H)$ ist im *absolut stetigen* (bzw. *singulären*) Spektrum von H, falls für ein $v \in V$, $\mu_{as,v} \neq 0$ (bzw. $\mu_{s,v} \neq 0$). Wir interessieren uns hier nur für das *absolut stetige Spektrum*, $\sigma_{as}(H)$.

Stonesche Formel: für $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ gilt

$$\begin{aligned} s - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \tfrac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_a^b \left[(H - \lambda - \mathrm{i}\varepsilon)^{-1} - (H - \lambda + \mathrm{i}\varepsilon)^{-1}\right] d\lambda \\ = \quad s - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \tfrac{1}{\pi} \int_a^b \mathrm{Im}\, G_{\lambda+\mathrm{i}\varepsilon}\, d\lambda \\ = \quad \tfrac{1}{2}\left(P_{[a,b]} + P_{(a,b)}\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Falls nun für $v \in V$

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{\lambda \in (a,b)} \left|G_{\lambda+\mathrm{i}\varepsilon}(v, v)\right| \leq C\,, \tag{8}$$

dann ist $(a,b) \subset \sigma_{as}(H)$. Denn, sei $f \in L^p([a,b])$ für $p > 1$, so gilt $(1/p + 1/q = 1)$

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(\lambda)\, d\mu_v(\lambda) \right| &\leq \|f\|_q \Big(\int_a^b \left[\tfrac{1}{\pi}\mathrm{Im}(G_\lambda(v,v))\right]^p \Big)^{1/p} \\ &\leq C\|f\|_q \end{aligned}$$

Daher ist $d\mu_v(\lambda) = g(\lambda)d\lambda$ für ein $g \in L^p([a,b])$.

Die Hauptmotivation ist die sogenannte **Extended States Conjecture** auf dem d–dimensionalen regulären Graphen $\mathbb{Z}^d$ von oben. Es gilt zunächst $\sigma(-\Delta) = \sigma_{as}(-\Delta) = [-2d, 2d]$. Für $d \geq 3$ und für Kopplung $a \neq 0$ soll für „fast alle“ Potentiale q,

$$\sigma_{as}(-\Delta + a \cdot q) = [-2d, 2d]$$

gelten.

In $d = 1$ gilt vollständige Anderson–Lokalisierung im Sinne von $\sigma_{as}(-\Delta + a \cdot q) = \emptyset$ für $a \neq 0$ und „fast alle “ q.

2 Eindimensionaler regulärer Graph, $\mathbb{N}_0$

Das Ziel ist nun, die Green–Funktion $G_\lambda(0,0)$ zu beschränken. Sei allgemein $\phi = (\phi_0, \phi_1, \ldots)$ mit $\phi_n := G_\lambda(0,n)$. Dann erfüllt ϕ (siehe (5))

$$(-\Delta + q - \lambda)\phi = 1_0\,.$$

Das ist äquivalent zum Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -\phi_1 + (q_0 - \lambda)\phi_0 - 1 &= 0\,, \\ -\phi_{n+1} + (q_n - \lambda)\phi_n - \phi_{n-1} &= 0\,, \quad n \geq 1\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Sei

$$A_n := \begin{bmatrix} q_n - \lambda & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}_0\,. \tag{10}$$

Dann ist $A_n \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, d.h., $\det(A_n) = 1$. ϕ erfüllt (5) bzw. (9) genau dann wenn

$$\begin{bmatrix} \phi_{n+1} \\ \phi_n \end{bmatrix} = A_n A_{n-1} \cdots A_0 \begin{bmatrix} \phi_0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

A_n heißt *Transfermatrix*. Es gibt nun genau eine Wahl von $\phi_0 \in \mathbb{C}$, nämlich $G_\lambda(0,0)$, sodaß ϕ_n, berechnet aus (11), einen Vektor $\phi \in \ell^2(\mathbb{N}_0)$ ergibt. Eine äquivalente Formulierung von (11) ist

$$\begin{bmatrix} \phi_0 \\ 1 \end{bmatrix} = A_0^{-1} A_1^{-1} \cdots A_n^{-1} \begin{bmatrix} \phi_{n+1} \\ \phi_n \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Hier berechnet man ϕ_0 aus den ebensowenig bekannten Vektor $\begin{bmatrix} \phi_{n+1} \\ \phi_n \end{bmatrix}$. Trotzdem besteht ein großer Unterschied zwischen (11) und (12), wenn man ϕ_0 berechnen will.

Als Beispiel betrachte das Potential $q = 0$ und $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [-2,2]$.

Dann hat $A_i = \begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ einen Eigenwert μ_1 mit $|\mu_1| < 1$ und einen Eigenwert μ_2 mit $|\mu_2| > 1$. Damit $\phi \in \ell^2$ muß ϕ_0 so gewählt werden, daß $\begin{bmatrix} \phi_0 \\ 1 \end{bmatrix}$ Eigenvektor zu μ_1 ist. Daher ist die linke Seite von (11), nämlich der Vektor $\begin{bmatrix} \phi_{n+1} \\ \phi_n \end{bmatrix}$, sehr empfindlich gegenüber der Wahl von $\begin{bmatrix} \phi_0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Im Gegensatz dazu ist für große n (abhängig von $\mathrm{Im}(\lambda) > 0$) die linke Seite in (12) wenig empfindlich gegenüber der Wahl des

Eingabevektors $\begin{bmatrix} \phi_{n+1} \\ \phi_n \end{bmatrix}$. Hier wird das Geschehen vom großen Eigenwert μ_2 bestimmt und $\begin{bmatrix} \phi_{n+1} \\ \phi_n \end{bmatrix}$ darf nur nicht im Eigenraum zu μ_1 liegen.

Es ist praktisch, das Gleichungssystem (12) umzuschreiben und für eine Folge $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Folge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit

$$\alpha_n := \frac{\phi_n}{\phi_{n-1}} \tag{13}$$

zu definieren; $\phi_{-1} := 1$. Sei $\Phi_n : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ die zur Transfermatrix A_n^{-1} assoziierte *Möbius–Transformation*

$$\Phi_n(z) := -\frac{1}{z + \lambda - q_n}\,. \tag{14}$$

Dann ist (12) äquivalent zu

$$\phi_0 = \Phi_0 \circ \Phi_1 \circ \cdots \circ \Phi_n(\alpha_{n+1})\,. \tag{15}$$

Interpretation:

$$\alpha_n = G_\lambda^{(t)}(n,n) := (-\Delta_n^{(t)} + q - \lambda)^{-1}(n,n)\,, \tag{16}$$

wobei $\Delta_n^{(t)}$ die Adjazenzmatrix für den bei $n \in \mathbb{N}_0$ abgeschnittenen Teilgraphen von $\mathbb{N}_0$ mit Vertexmenge $\{n, n+1, \ldots\}$ ist; bedenke, daß $\alpha_0 = G_\lambda(0,0)$ oder vergleiche mit der allgemeinen Formel (28).

Wir statten die obere Halbebene $\mathbb{H}$ mit der *hyperbolischen* (oder Poincaré) *Metrik* d aus, d.h.,

$$\mathrm{d}(z_1, z_2) := \cosh^{-1}\left(1 + \tfrac{1}{2}\frac{|z_1 - z_2|^2}{\mathrm{Im}(z_1)\mathrm{Im}(z_2)}\right), \quad z_1, z_2 \in \mathbb{H}\,.$$

Proposition 1. *(i) Für* $\mathrm{Im}(\lambda) \geq 0$ *ist* Φ_n *eine hyperbolische* Kontraktion *auf* $(\mathbb{H}, \mathrm{d})$*, d.h., für* $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ *gilt*

$$\mathrm{d}(\Phi_n(z_1), \Phi_n(z_2)) \leq \mathrm{d}(z_1, z_2)\,.$$

(ii) Für $\mathrm{Im}(\lambda) > 0$ *ist* $\Phi_n(\mathbb{H}) \subset \{z \in \mathbb{H} : |z| < 1/\mathrm{Im}(\lambda)\}$*. Weiters ist* Φ_n *eine* strikte *hyperbolische* Kontraktion*. D.h., für* $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ *mit* $\max\{|z_1|, |z_2|\} < C$ *existiert eine Konstante* $\delta < 1$ *(z.B.* $\delta = C/(C + \mathrm{Im}(\lambda))$*) abhängig von* $\mathrm{Im}(\lambda)$ *und* C *s.d.*

$$\mathrm{d}(\Phi_n(z_1), \Phi_n(z_2)) \leq \delta\, \mathrm{d}(z_1, z_2)\,.$$

Schreibe $\Phi_n = \rho \circ \tau_n$ mit der Rotation $\rho : z \mapsto -1/z$ (um Punkt i um Winkel π) und der Translation $\tau_n : z \mapsto z + \lambda - q_n$. ρ ist eine hyperbolische Isometrie. Ist $\mathrm{Im}(\lambda) > 0$ so ist τ_n eine strikte hyperbolische Kontraktion, d.h., $\mathrm{d}(\tau_n(z_1), \tau_n(z_2)) < \mathrm{d}(z_1, z_2)$ wie man leicht sieht. Ist $\mathrm{Im}(\lambda) = 0$, so ist auch τ_n eine Isometrie. □

Für $\mathrm{Im}(\lambda) > 0$ verschiebt Φ_n die obere Halbebene nach oben. Darüber hinaus gilt (Potential q ist beschränkt)

Proposition 2. *Für* $\mathrm{Im}(\lambda) > 0$ *existiert eine hyperbolische Kreisfläche* $B \subset \mathbb{H}$ *sodaß* $\Phi_{n-1} \circ \Phi_n(\mathbb{H}) \subset B$*.*

Damit kommen wir zur eingangs gemachten Behauptung über die Green–Funktion.

THEOREM 3. *Sei* $\mathrm{Im}(\lambda) > 0$ *und* $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine* beliebige *Folge in* $\mathbb{H}$*. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_0 \circ \Phi_1 \circ \cdots \circ \Phi_n(\gamma_n) = \phi_0 = G_\lambda(0,0)\,. \tag{17}$$

Beweis: Sei $w_n := \Phi_0 \circ \Phi_1 \circ \cdots \circ \Phi_n(\gamma_n)$. Sei B eine Kreisfläche wie in Proposition 2 und $\beta := \Phi_{n-1} \circ \Phi_n(\gamma_n)$. Dann ist $\beta \in B$. Das gleiche gilt für $\beta' := \Phi_{n-1} \circ \Phi_n \circ \Phi_{n+1}(\gamma_{n+1})$. Alle weiteren Bilder $\Phi_k(\beta)$ und $\Phi_k(\beta')$ bleiben in B und die Bedingungen aus Proposition 1, Teil (ii) sind erfüllt. Damit folgt

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}(w_{n+1}, w_n) \\ &\quad = \mathrm{d}(\Phi_0 \circ \cdots \circ \Phi_{n-2}(\beta'), \Phi_0 \circ \cdots \circ \Phi_{n-2}(\beta)) \\ &\quad \leq \delta\, \mathrm{d}(\Phi_1 \circ \cdots \circ \Phi_{n-2}(\beta'), \Phi_1 \circ \cdots \circ \Phi_{n-2}(\beta)) \\ &\quad \leq \delta^{n-1} \mathrm{d}(\beta', \beta) \\ &\quad = C\, \delta^n \,. \end{aligned}$$

$(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist somit eine Cauchy–Folge und konvergiert gegen ein $w \in \mathbb{H}$. Sei nun $(\gamma'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine weitere Folge in $\mathbb{H}$, so gilt analog

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}(\Phi_0 \circ \cdots \circ \Phi_{n-1} \circ \Phi_n(\gamma_n), \Phi_0 \circ \cdots \circ \Phi_{n-1} \circ \Phi_n(\gamma'_n)) \\ &\qquad \leq C\, \delta^{n-1} \mathrm{d}(\Phi_{n-1} \circ \Phi_n(\gamma_n), \Phi_{n-1} \circ \Phi_n(\gamma'_n)) \\ &\qquad \leq C\, \delta^{n-1} \,. \end{aligned}$$

Daher konvergiert auch $\Phi_0 \circ \cdots \circ \Phi_{n-1} \circ \Phi_n(\gamma'_n)$ gegen w für $n \to \infty$. $w = \phi_0 = G_\lambda(0,0)$ wegen (15). □

Proposition 4. *Sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{H}, K \subset \{\mathrm{Im}(\lambda) \geq 0\}$ kompakt, und C_1, C_2 Konstanten sodaß*

$$\sum_{n \geq 1} \mathrm{d}(\Phi_{n+1}(z_{n+1}), z_n) \leq C_1 \tag{18}$$

und

$$\mathrm{d}(z_1, \mathrm{i}) \leq C_2 \tag{19}$$

für alle $\lambda \in K$. Dann existiert eine Konstante C_3 sodaß für alle $\lambda \in K$

$$\mathrm{d}(G_\lambda(0,0), \mathrm{i}) \leq C_3 \,. \tag{20}$$

Solche Potentiale q liefern dann a.s. Spektrum für $\lambda \in \mathrm{Re}(K)$, bzw. reines a.s. Spektrum für $\lambda \in \mathrm{int}(\mathrm{Re}(K))$, dem Inneren des Realteils von K.

Beweis: Wegen Theorem 3 existiert $n \in \mathbb{N}$ sodaß

$$\mathrm{d}(G_\lambda(0,0), \Phi_0 \circ \cdots \circ \Phi_n(z_n)) \leq 1 \,.$$

Damit folgt wegen der Dreiecksungleichung bezüglich der Metrik d und der Kontraktionseigenschaft von Φ_n

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}(G_\lambda(0,0),\mathrm{i}) \\
&\quad\le\ \mathrm{d}(G_\lambda(0,0),\Phi_0\circ\cdots\circ\Phi_n(z_n)) + \mathrm{d}(\Phi_0\circ\cdots\circ\Phi_n(z_n),\mathrm{i}) \\
&\quad\le\ \mathrm{d}(\Phi_0\circ\cdots\circ\Phi_{n-1}(\Phi_n(z_n)),\Phi_0\circ\cdots\circ\Phi_{n-1}(z_{n-1})) \\
&\qquad\ + \mathrm{d}(\Phi_0\circ\cdots\circ\Phi_{n-1}(z_{n-1}),\mathrm{i}) + 1 \\
&\quad\le\ \mathrm{d}(\Phi_n(z_n),z_{n-1}) + \mathrm{d}(\Phi_0\circ\cdots\circ\Phi_{n-1}(z_{n-1}),\mathrm{i}) + 1 \\
&\quad\le\ \ldots \\
&\quad\le\ \sum_{k=1}^{n-1}\mathrm{d}(\Phi_{k+1}(z_{k+1}),z_k) + \mathrm{d}(\Phi_0(z_1),\mathrm{i}) + 1 \\
&\quad\le\ C_1 + \mathrm{d}(\Phi_0(z_1),\mathrm{i}) + 1 \\
&\quad\le\ C_3\,.
\end{aligned}
$$

Beispiele: (i) *Potential $q=0$*: $\Phi_n(z)=\Phi(z):=-\frac{1}{z+\lambda}$. Sei z_+ der Fixpunkt von Φ, d.h.,

$$z_+ = -\frac{1}{z_+ + \lambda}\,. \tag{21}$$

Wegen Theorem 3 mit $\gamma_n = z_+$ ist dann $\phi_0 = G_\lambda(0,0) = z_+$. Es gilt

$$z_+ = -\lambda/2 + \mathrm{i}\sqrt{1-\lambda^2/4}\,. \tag{22}$$

$z_- := -\lambda/2 - \mathrm{i}\sqrt{1-\lambda^2/4}$ ist die zweite Lösung der Fixpunkt Gleichung (21), allerdings in der unteren Halbebene. $z_\pm$ sind auch die Eigenwerte der Transfermatrix. z_+ und z_- sind der stabile bzw. instabile Eigenwert dieser Matrix.

Für $\lambda\in\mathbb{R}$ ist $z_+\in\mathbb{H}$ genau dann wenn $|\lambda|<2$. Daher haben wir $\sigma(-\Delta)=\sigma_{as}(-\Delta)=[-2,2]$.

[Etwas genauer, ersetze λ durch $\lambda+\mathrm{i}\varepsilon$ und dann $\varepsilon\downarrow 0$.]

(ii) *Kurzreichweitiges Potential* q mit $q_n\to 0$ für $n\to\infty$. Wähle in Proposition 4 die konstante Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $z_n := z_+$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}(\Phi_n(z_+),z_+) \\
&\quad=\ \mathrm{d}\Big(-\frac{1}{z_+ + \lambda - q_n}, z_+\Big) \\
&\quad=\ \mathrm{d}\Big(z_+ + \lambda - q_n, -\frac{1}{z_+}\Big) \\
&\quad=\ \mathrm{d}\big(\lambda/2 + \mathrm{i}\sqrt{1-\lambda^2/4} - q_n, \lambda/2 + \mathrm{i}\sqrt{1-\lambda^2/4}\big) \\
&\quad\le\ C\,|q_n|\,.
\end{aligned}
$$

Ist nun $\sum_n |q_n| \le C_1$, also ein sogenanntes kurzreichweitiges Potential, so folgt aus Proposition 4, daß dann

$$[-2,2]\subseteq\sigma_{as}(-\Delta+q)\,.$$

(iii) Sei wieder q mit $q_n\to 0$ für $n\to\infty$. Wähle nun z_n für $n\ge k$ gleich dem Fixpunkt der Abbildung Φ_n. Dann ist

$$z_n = -(\lambda-q_n)/2 + \mathrm{i}\sqrt{1-(\lambda-q_n)^2/4}\,.$$

$z_n\in\mathbb{H}$ falls $|\lambda|<2$ und k groß genug. Für $1\le n<k$ wähle beliebige Punkte in $\mathbb{H}$. Damit gilt

$$\mathrm{d}(\Phi_{n+1}(z_{n+1}),z_n) = \mathrm{d}(z_{n+1},z_n) \le C\,|q_{n+1}-q_n|\,.$$

Ist nun zusätzlich $\sum_{n\ge 1}|q_{n+1}-q_n|<\infty$, so gilt wieder nach Proposition 4, daß $[-2,2]\subseteq\sigma_{as}(-\Delta+q)$. Das ist bekannt unter der *Mourre–Abschätzung*.

- Grenzfall für Potentiale in (ii) ist $q_n = 1/n$. Für stark oszillierende Potentiale wie $q_n = (-1)^n/n$ gilt dies auch in (iii).
- Ist q_n monoton abfallend dann liefert die Mourre–Abschätzung sogar reines a.s. Spektrum von H auf $(-2,2)$.

3 Zufälliges Potential

Der Wert des Potentials q_v am Vertex $v \in V$ soll jetzt zufällig sein. Sei dazu ν ein kompakt getragenes *Wahrscheinlichkeitsmaß* auf $\mathbb{R}$ mit Mittelwert 0. Wir nehmen weiters an, daß

(i) $\mathbb{P}[q_w \in B] = \nu(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ für alle $w \in V$ (*identisch* verteilt)

(ii) $\mathbb{P}\big[\bigcap_{i=1}^N (q_{w_i} \in B_i)\big] = \prod_{i=1}^N \mathbb{P}[q_{w_i} \in B_i]$ für $w_i \neq w_j, i \neq j$ und $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (*unabhängig* verteilt).

Die Green–Funktion $G_\lambda(v, w)$ hängt nun von der Realisierung des Potentials ab. Das Gleiche gilt für (das Spektrum von) $H = -\Delta + q$; H heißt jetzt *Anderson*–Hamiltonian (Operator, Modell).

Unter gewissen (Ergodizitäts-)Bedingungen an den Graphen (V, E) — die für $\mathbb{Z}^d$ und T_k erfüllt sind — ist jedoch $\sigma_{(as)}(H)$ fast sicher eine feste Menge (*Kirsch–Martinelli*).

THEOREM 5. *Sei $H = -\Delta + a_n \cdot q_n$ mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \ell^2(\mathbb{N}_0)$. Dann ist fast sicher $(-2, 2)$ Teil des a.s. Spektrums von H und ist dort rein a.s.*

Bemerkungen: (i) *Deylon–Simon–Souillard* haben dies u.a. in 1985 bewiesen. *Kotani–Ushiroya* publizierten 1988 Analoges auf $\mathbb{R}$.

(ii) Grenzfall ist jetzt $a_n = 1/\sqrt{n}$.

(iii) In höherer Dimension bleibt es für deterministische Potentiale beim Abfall $q_n = 1/n$ um a.s. Spektrum zu garantieren. Für zufällige Potentiale soll sich das aber dramatisch verbessern. Die Extended States Conjecture besagt, daß für $d \geq 3$ gar kein Abfall mehr nötig ist, siehe *Bourgain* für $d = 2$.

(iv) Erweiterung auf Streifen endlicher Breite mit $V = \mathbb{N}_0 \times \{1, \ldots, L\}$ wird demnächst gepostet.

Beweis: Sei für $\lambda \in (-2, 2)$, $z_\lambda = -\lambda/2 + \mathrm{i}\sqrt{1 - \lambda^2/4}$ die (abgeschnittene) Green–Funktion des (freien) Laplace–Operators $-\Delta$. Die Vorstellung ist, daß für (kleine) zufällige Potentiale die (zufällige) Green–Funktion um z_λ konzentriert ist. Sei ρ ein (geeignetes) Maß auf $\mathbb{H}$. Dann definieren wir das *Moment*

$$M(\rho) := \int_{\mathbb{H}} \mathrm{w}_{(\lambda)}(z)\, d\rho(z)\,, \tag{23}$$

wobei

$$\mathrm{w}_{(\lambda)}(z) := 1 + \frac{|z - z_\lambda|^2}{\mathrm{Im}(z)}\,. \tag{24}$$

Sei nun ρ_n das W–Maß der abgeschnittenen Green–Funktion $G_\lambda^{(t)}(n, n)$ am Vertex $n \in \mathbb{N}_0$. ρ_n ist das Bildmaß $(\rho_{n+1} \times \nu) \circ \Phi_n^{-1}$ des Maßes $\rho_{n+1} \times \nu$ unter der Abbildung (λ ist fix)

$$\Phi_n : \mathbb{H} \times \mathbb{R} \to \mathbb{H}\,, \quad (z, q_n) \mapsto -\frac{1}{z + \lambda - a_n q_n}\,.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} M(\rho_n) &= \int_{\mathbb{H}} \mathrm{w}(z)\, d\rho_n(z) \\ &= \int_{\mathbb{H}\times\mathbb{R}} \mathrm{w}(\Phi_n(z, q_n))\, d\nu(q_n) d\rho_{n+1}(z)\,. \end{aligned}$$

Schreiben wir nun

$$\mathrm{w}(\Phi_n(z, q_n)) = \frac{\mathrm{w}(\Phi_n(z, q_n))}{\mathrm{w}(z)}\, \mathrm{w}(z) := \mu(z, q_n)\, \mathrm{w}(z)$$

und definieren weiters die gemittelte *Ausdehnungsrate*

$$\mu_n(z) := \int_{\mathbb{R}} \mu(z, q_n)\, d\nu(q_n)$$

so haben wir

$$M(\rho_n) = \int_{\mathbb{H}} \mu_n(z) \mathrm{w}(z)\, d\rho_{n+1}(z)\,.$$

(i)

$$\begin{aligned}\mu(z,q) &= \frac{\left[y+\varepsilon+\left|1+z_\lambda(z+\lambda+\mathrm{i}\varepsilon-q)\right|^2\right]y}{\left[y+|z-z_\lambda|^2\right](y+\varepsilon)}\\ &= A_0(z)+A_1(z)q+A_2(z)q^2\end{aligned}$$

mit rationalen Funktionen $A_i(z)$ und $y := \mathrm{Im}(z)$.

(ii) $A_0 \leq 1$ und A_1 und A_2 sind beschränkt.

(iii) Nach Integration bezüglich ν ergibt sich

$$\begin{aligned}\mu_n(z) &= A_0(z)+A_2(z)\,a_n^2\,\mathbb{E}(q_n^2)\\ &\leq 1+Ca_n^2\end{aligned}$$

uniform in λ.

(iv)

$$\begin{aligned}M(\rho_n) &\leq \int_{\mathbb{H}}(1+Ca_n^2)\,\mathrm{w}(z)\,d\rho_{n+1}(z)\\ &= (1+Ca_n^2)M(\rho_{n+1})\\ &\leq \dots\\ &\leq \prod_{k=n}^{n+N-1}(1+Ca_k^2)\;M(\rho_{n+N})\,.\end{aligned}$$

(v) Die zusätzliche Abschätzung ($a_n \to 0$ für $n \to \infty$)

$$M(\rho_N) \leq C$$

für N groß genug liefert dann

$$M(\rho_n) \leq C\prod_{k\geq n}(1+Ca_k^2)\,.$$

Die rechte Seite ist konvergent falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$. □

4 Höherdimensionale Graphen

Wir wollen nun den Transfermatrixformalismus auf höhere Dimensionen verallgemeinern. Dazu fixieren wir einen Punkt $0 \in V$ und definieren *Polarkoordinaten* bezüglich 0. Sei

$$S_n := \{v \in V : \mathrm{dist}(v,0)=n\}\,. \tag{25}$$

Dann ist $V = \bigcup_{n\geq 0} S_n$ und $\ell^2(V) = \bigoplus_{n\geq 0}\ell^2(S_n)$. Wir schreiben nun Δ bezüglich dieser Zerlegung in *Blockmatrixform*

$$\Delta = \begin{bmatrix} D_0 & E_0^T & 0 & \cdots & \cdots & \cdots\\ E_0 & D_1 & E_1^T & 0 & \cdots & \cdots\\ 0 & E_1 & D_2 & E_2^T & 0 & \cdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots\end{bmatrix}, \tag{26}$$

wobei D_n die Adjazenzmatrix des Graphen (V,E) eingeschränkt auf S_n ist. $E_n : \ell^2(S_n) \to \ell^2(S_{n+1})$ ist die Abbildung mit Kern

$$E_n(v,w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \in S_n, w \in S_{n+1}, (v,w)\in E\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}\,.$$

Das Potential $q = \bigoplus_{n\geq 0} q_n$ ist diagonal. $H = -\Delta + q$ ist dann von der Blockmatrixform

$$H = \begin{bmatrix} -D_0+q_0 & -E_0^T & 0 & \cdots & \cdots & \cdots\\ -E_0 & -D_1+q_1 & -E_1^T & 0 & \cdots & \cdots\\ 0 & -E_1 & -D_2+q_2 & -E_2^T & 0 & \cdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots\end{bmatrix}. \tag{27}$$

Seien $P_n : \ell^2(V) \to \ell^2(S_n)$ und $P_{n,\infty} := \sum_{k\geq n} P_k$ orthogonale Projektoren.

Damit definieren wir den *abgeschnittenen Hamiltonian*

$$H_n := P_{n,\infty}\, H\, P_{n,\infty}$$

und die *abgeschnittene Green–Funktion*

$$G_\lambda^{(t)}(n,n) := P_n(H_n - \lambda)^{-1} P_n\,, \quad n \in \mathbb{N}_0\,. \tag{28}$$

$G_\lambda^{(t)}(n,n)$ ist eine $d_n \times d_n$ dimensionale Matrix mit $d_n = |S_n|$. Weiters ist

$$G_\lambda^{(t)}(n,n) \in \mathbb{SH}_{d_n}\,, \tag{29}$$

wobei

$$\mathbb{SH}_d := \{Z = X + \mathrm{i}Y : X, Y \in \mathrm{Mat}(d,\mathbb{R}), X = X^T, Y > 0\}$$

der *Siegel–Halbraum* ist. Es gilt $\mathbb{SH}_1 = \mathbb{H}$.

Die Matrizen $G_\lambda^{(t)}(n,n)$ verallgemeinern die Zahlen $\alpha_n \in \mathbb{H}$ aus Gleichung (13) und es gilt analog eine Rekursionsformel mit einer *verallgemeinerten Möbius–Transformation*, vgl. Glg. (14). Genauer, sei

$$\Phi_n : \mathbb{SH}_{d_{n+1}} \times \mathrm{Mat}(d_n,\mathbb{R}) \times \mathbb{H} \to \mathbb{SH}_{d_n}$$
$$(Z, q_n, \lambda) \mapsto -(E_n^T Z E_n + D_n - q_n + \lambda)^{-1}\,.$$

Dann gilt (vgl. α_n aus Glg. (16))

$$G_\lambda^{(t)}(n,n) = \Phi_n\big(G_\lambda^{(t)}(n+1,n+1), q_n, \lambda\big)\,. \tag{30}$$

Der Beweis beruht auf der *Schurschen Formel*

$$\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (A - B^T C^{-1} B)^{-1} & * \\ * & * \end{bmatrix}, \tag{31}$$

indem man $A = -D_n + q_n - \lambda, B = (E_n, 0, \ldots)$ und $C = H_{n+1} - \lambda$ einsetzt.

Wir verwenden auf $\mathbb{SH}_n$ nicht die (übliche) Riemann–Metrik sondern eine sogenannte *Finsler–Metrik*. Sei $W \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$ ein Element des Tangentialraumes bei $Z = X + \mathrm{i}Y \in \mathbb{SH}_n$. Dann definieren wir

$$F_Z(W) := \|Y^{-1/2} W Y^{-1/2}\|\,, \tag{32}$$

wobei $\|\cdot\|$ die übliche Operatornorm ist. Für $n = 1$ liefert dies $|W|/Y$, d.h. die (übliche) Länge des Geschwindigkeitsvektors $W \in \mathbb{C}$ im Punkt $Z \in \mathbb{H}$.

Die Metrik auf $\mathbb{SH}_n$ ist dann definiert als

$$d(Z_1, Z_2) := \inf_{Z(t)} \int_0^1 F_{Z(t)}\big(\dot{Z}(t)\big)\, dt\,, \quad Z_1, Z_2 \in \mathbb{SH}_n\,, \tag{33}$$

wobei $Z(t)$ alle differenzierbaren Pfade $Z : [0,1] \to \mathbb{SH}_n$ durchläuft mit $Z(0) = Z_1, Z(1) = Z_2$.

Propositionen 1–4 lassen sich direkt verallgemeinern. Z.B.

THEOREM 6. *Sei* $\mathrm{Im}(\lambda) > 0$ *und* $Z_i \in \mathbb{SH}_{d_i}$ *mit* $d_i = |S_i|$ *eine beliebige Folge. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_0 \circ \cdots \circ \Phi_n(Z_{n+1}) = \phi_0 = G_\lambda(0,0)\,. \tag{34}$$

Auf Bäumen, hier für den binären Baum T_2, ist die Rekursion Φ_n sehr einfach, denn Diagonalmatrizen werden durch Φ_n wieder in solche überführt ($q_n = \mathrm{diag}(q_{n,1}, q_{n,1}, \ldots, q_{n,2^n})$):

$$\begin{aligned}&\Phi_n\big(\mathrm{diag}(z_1, z_2, \ldots), q_n, \lambda\big)\\ &\quad = \mathrm{diag}\big(\psi(z_1, z_2, q_{n,1}, \lambda), \psi(z_3, z_4, q_{n,2}, \lambda), \ldots\big)\,, \quad z_i \in \mathbb{H}\end{aligned}$$

mit

$$\psi : \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}\,, \quad \psi(z_1, z_2, q, \lambda) := -\frac{1}{z_1 + z_2 + \lambda - q}\,. \tag{35}$$

Setze nun $q = 0$ und betrachte die Fixpunktgleichung

$$\psi(z, z, 0, \lambda) = -\frac{1}{2z + \lambda} = z\,. \tag{36}$$

Die zwei Lösungen sind offensichtlich $z_\pm = -\lambda/4 \pm \sqrt{\lambda^2/16 - 1/2}$. Diese haben für $\lambda \in \mathbb{R}$ einen von Null verschiedenen Imaginärteil genau dann wenn $|\lambda| < 2\sqrt{2}$. Wir verwenden dann

$$z_\lambda := -\lambda/4 + \mathrm{i}\sqrt{1/2 - \lambda^2/16} \tag{37}$$

für die Lösung in $\mathbb{H}$. Weiters, sei $Z_n := \mathrm{diag}(z_\lambda) \in \mathbb{SH}_{2^n}$. Dann ist

$$\Phi_n\big(Z_{n+1}, 0, \lambda\big) = \mathrm{diag}\big(\psi(z_\lambda, z_\lambda, 0, \lambda), \ldots\big) = Z_n\,.$$

Theorem 6 liefert dann, daß z_λ die Green–Funktion $G_\lambda(0,0)$ des binären Graphen (mit Wurzel bei 0) ist. Daher gilt

$$\sigma(\Delta) = \sigma_{as}(\Delta) = [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]\,.$$

Betrachten jetzt den Anderson–Hamiltonian auf dem binären Graphen T_2. Sei dazu q ein Zufallspotential wie zu Beginn von Kapitel 3 mit W–Maß ν, $a > 0$ und $H = -\Delta + a \cdot q$.

THEOREM 7 (*Extended States Conjecture*)**.** *Für jedes $|\lambda| < 2\sqrt{2}$ gibt es ein $a_0 > 0$ sodaß für alle $0 \le a \le a_0$ fast sicher*

$$\sigma_{as}(H) \cap (\lambda, \lambda) = (\lambda, \lambda)\,, \quad \sigma_s(H) \cap (\lambda, \lambda) = \emptyset\,. \tag{38}$$

Siehe auch Klein (1998) und Aizenman–Sims–Warzel (2005).

Beweisidee: Das Maß der abgeschnittenen Green–Funktion $G_\lambda^{(t)}(n,n)$ auf $\mathbb{SH}_{2^n}$ ist auf *Diagonalmatrizen* konzentriert und gleich $\bigotimes_{i=1}^{2^n} \rho$ mit einem Maß ρ auf $\mathbb{H}$. Wegen der Rekursionsformel (30) ist ρ gleich dem Bildmaß $(\rho \times \rho \times \nu) \circ \psi^{-1}$.

Wir wollen wieder ein *Moment* von ρ definieren und für $\mathrm{Im}(\lambda) \downarrow 0$ kontrollieren. Sei dazu (vgl. mit $\cosh(\mathrm{d})$)

$$\mathrm{w}(z) := \frac{|z - z_\lambda|^2}{\mathrm{Im}(z)}\,, \quad z \in \mathbb{H} \tag{39}$$

und

$$M(\rho) := \int_{\mathbb{H}} \mathrm{w}(z)\, d\rho(z)\,. \tag{40}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}&M(\rho)\\ &\quad = \int_{\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}} \mathrm{w}\big(\psi(z_1, z_2, q, \lambda)\big)\, d\rho(z_1) d\rho(z_2) d\nu(q)\\ &\quad = \int_{\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}} \underbrace{\frac{\mathrm{w}\big(\psi(z_1, z_2, q, \lambda)\big)}{\frac{1}{2}\mathrm{w}(z_1) + \frac{1}{2}\mathrm{w}(z_2)}}_{=:\mu(z_1, z_2, q, \lambda)} \big(\tfrac{1}{2}\mathrm{w}(z_1) + \tfrac{1}{2}\mathrm{w}(z_2)\big)\, d\rho(z_1) d\rho(z_2) d\nu(q)\,.\end{aligned}$$

Es gilt (Konvexität)

$$\mathrm{w}\big(\psi(z_1, z_2, 0, \lambda)\big) \leq \tfrac{1}{2}\mathrm{w}(z_1) + \tfrac{1}{2}\mathrm{w}(z_2) \tag{41}$$

mit Gleichheit genau dann wenn $z_1 = z_2$. Mit anderen Worten, die Ausdehnungsrate $\mu(z_1, z_2, 0, \lambda) \leq 1$. *Angenommen*,

$$\mu(z_1, z_2, q, \lambda) \leq 1 - \mu_0 < 1$$

für z_1, z_2 in der Nähe des Randes von $\mathbb{H}^2$ mit der Konstanten μ_0 und q in einem (offenen) Intervall $I \ni 0$. D.h., ψ als Abbildung von $\mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}$ ist dort bzgl. w eine *strikte* Kontraktion. Wähle nun eine kompakte Menge $B \subset \mathbb{H}^2$ mit $B \ni (z_\lambda, z_\lambda)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&M(\rho)\\
&= \int_{(B\times\mathbb{R})\cup(\mathbb{H}^2\setminus B)\times\mathbb{R}} \mu(z_1, z_2, q, \lambda)\big(\tfrac{1}{2}\mathrm{w}(z_1) + \tfrac{1}{2}\mathrm{w}(z_2)\big)\, d\rho(z_1)d\rho(z_2)d\nu(q)\\
&\leq C + (1-\mu_0)\int_{(\mathbb{H}^2\setminus B)\times\mathbb{R}} \big(\tfrac{1}{2}\mathrm{w}(z_1) + \tfrac{1}{2}\mathrm{w}(z_2)\big)\, d\rho(z_1)d\rho(z_2)d\nu(q)\\
&\leq C + (1-\mu_0)\int_{\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}} \big(\tfrac{1}{2}\mathrm{w}(z_1) + \tfrac{1}{2}\mathrm{w}(z_2)\big)\, d\rho(z_1)d\rho(z_2)d\nu(q)\\
&= C + (1-\mu_0)M(\rho)\,,
\end{aligned}$$

wobei C is eine endliche Konstante ist. Das ergibt dann

$$M(\rho) < C/\mu_0\,.$$

Die obige Annahme über die Funktion μ stimmt so nicht. Man muß noch einmal die Rekursionsformel anwenden, und dann eine analoge Funktion $\tilde{\mu}$ definieren, die dann (in der Nähe des Randes von $\mathbb{H}^3$) $\tilde{\mu}(z_1, z_2, z_3, q, \lambda) \leq 1 - \mu_0 < 1$ erfüllt (Drecksarbeit). □

Vorteil der Methode ist auch, daß sie erlaubt, numerisch eine obere Schranke für die Stärke des Potentials anzugeben, sodaß a.s. Spektrum garantiert ist. Phasendiagramm.

Abfallprodukt dieses Beweises ist der Beweis für absolut stetiges Spektrum der (zufälligen) Adjazenzmatrix eines Perkolations–modells.

Betrachte wieder den binären Baum und $p \in [0, 1)$. Auf jedem Vertex *entferne* mit Wahrscheinlichkeit p *einen* der beiden Vorwärtsnachbarn. Mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ werden die beiden Vorwärtsnachbarn beibehalten. Betrachte die Adjazenzmatrix Δ auf dem verbleibenden zufälligen Graphen.

THEOREM 8. *Für jedes $0 \leq \lambda < 2\sqrt{2}$ existiert ein p_0, sodaß für alle $p \leq p_0$, $[-\lambda, \lambda] \subset \sigma_{as}(\Delta)$. Weiters ist das Spektrum dort rein absolut stetig.*

Zusammenfassung

- Haben eine geometrisch motivierte Transfermatrix–Methode vorgestellt, die die Green–Funktion von deterministischen und zufälligen Schrödinger–Operatoren kontrolliert und somit absolut stetiges Spektrum nachweist.
- *Vorteil* (und gleichzeitig *Nachteil*) ist, daß diese Methode *rein* absolut stetiges Spektrum liefert. Daher kann man damit z.B. nicht B. Simon's sogenannte L^2–Vermutung zeigen: in einer Dimension und $q \in \ell^2(\mathbb{N}_0)$ ist $\sigma_{as}(-\Delta + q) = [-2, 2]$ (*Deift–Killip*).
- Ist es mit dieser Methode möglich, die Extended States Conjecture auf dem Gitter $\mathbb{Z}^d$ zu beweisen, vielleicht für große d? Zur Zeit weit davon entfernt. No risk, no fun!